ĐH561Đ

TRUNG TÂM LUYỆN THI ĐẠI HỌC VĨNH VIỄN SÀI GÒN

Tổng chủ biên: **PHẠM HỒNG DANH**
NGUYỄN PHÚ KHÁNH - NGUYỄN TẤT THU
NGUYỄN TẤN SIÊNG - TRẦN VĂN TOÀN - NGUYỄN ANH TRƯỜNG
(Nhóm giáo viên chuyên luyện thi Đại học)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÌNH HỌC

theo chuyên đề

HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN
HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Công ty TNHH thành viên dịch vụ văn
Nhà sá

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 12760 / 13

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập : NGỌC LÂM
Chế bản : CÔNG TY KHANG VIỆT
Trình bày bìa : CÔNG TY KHANG VIỆT

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC THEO CHUYÊN ĐỀ

Mã số: 1L–321ĐH2012
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm
Tại: **Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC**
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 1335 – 2012/CXB/07 – 215/ĐHQGHN ngày 06/11/2012.
Quyết định xuất bản số: 318LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 12/11/2012
In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2013

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT GIÁO KHOA

I. Tọa độ trong mặt phẳng.

- Cho $\vec{u}(x_1, y_1)$; $\vec{v}(x_2; y_2)$ và $k \in R$. Khi đó:

1) $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2; y_1+y_2)$ 2) $\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2; y_1-y_2)$

3) $k\vec{u}=(kx_1; ky_1)$ 4) $|\vec{u}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ 5) $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

6) $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

- Hai véc tơ $\vec{u}(x_1, y_1)$; $\vec{v}(x_2; y_2)$ cùng phương với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \end{cases}$

- Góc giữa hai véc tơ $\vec{u}(x_1, y_1)$; $\vec{v}(x_2; y_2)$:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

- Cho $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$. Khi đó :

1) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A; y_B-y_A)$ 2) $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

3) $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ trong đó I là trung điểm của AB.

- $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$
- Cho tam giác ABC với $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Khi đó trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là : $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$.

II. Phương trình đường thẳng

1. Phương trình đường thẳng

1.1. Véc tơ chỉ phương (VTCP), véc tơ pháp tuyến (VTPT) của đường thẳng :

Cho đường thẳng d.

- $\vec{n}=(a;b) \neq \vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến của d nếu giá của nó vuông với d.

- $\vec{u}=(u_1;u_2)\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương của d nếu giá của nó trùng hoặc song song với đường thẳng d.

Một đường thẳng có vô số VTPT và vô số VTCP (Các véc tơ này luôn cùng phương với nhau)

- Mối quan hệ giữa VTPT và VTCP: $\vec{n}.\vec{u}=0$.
- Nếu $\vec{n}=(a;b)$ là một VTPT của đường thẳng d thì $\vec{u}=(b;-a)$ là một VTCP của đường thẳng d.
- Đường thẳng AB có $\overrightarrow{AB}$ là VTCP.

1.2. Phương trình đường thẳng

1.2.1. Phương trình tổng quát của đường thẳng :

Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có $\vec{n}=(a;b)$ là VTPT, khi đó phương trình tổng quát của d có dạng: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

1.2.2. Phương trình tham số của đường thẳng :

Cho đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có $\vec{u}=(a;b)$ là VTCP, khi đó phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases},\ t\in R$.

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $d_1:a_1x+b_1y+c_1=0;\ d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$. Khi đó vị trí tương đối giữa chúng phụ thuộc vào số nghiệm của hệ : $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ (I)

- Nếu (I) vô nghiệm thì $d_1//d_2$.
- Nếu (I) vô số nghiệm thì $d_1\equiv d_2$
- Nếu (I) có nghiệm duy nhất thì d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

3. Góc giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $d_1:a_1x+b_1y+c_1=0;\ d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$. Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.

Ta có : $\cos\alpha=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.

Cho đường thẳng $\Delta:ax+by+c=0$ và điểm $M(x_0;y_0)$. Khi đó khoảng cách từ M đến Δ được tính bởi công thức:

$$d(M,(\Delta))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5. Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2:a_2x+b_2y+c_2=0$

Phương trình phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng là:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

III. Phương trình đường tròn.

1. Phương trình đường tròn:

Cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R, khi đó phương trình của (C) là: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Ngoài ra phương trình: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ cũng là phương trình của đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến:

Cho đường tròn (C) : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

- Tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M là đường thẳng đi qua M và vuông góc với IM.
- Đường thẳng $\Delta:Ax+By+C=0$ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$
- Đường tròn (C) : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có hai tiếp tuyến cùng phương với Oy là $x=a\pm R$. Ngoài hai tiếp tuyến này các tiếp tuyến còn lại đều có dạng: $y=kx+m$.

IV. E líp

1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1,F_2 có $F_1F_2=2c$. Tập hợp các điểm M của mặt phẳng sao cho $MF_1+MF_2=2a$ (2a không đổi và $a>c>0$) là một đường elíp.

- F_1,F_2 : là hai tiêu điểm và 2c là tiêu cự của elíp.
- MF_1,MF_2 : là các bán kính qua tiêu.

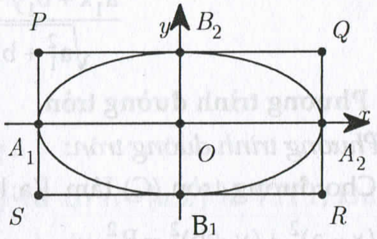
2. Phương trình chính tắc của elíp:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ với } b^2=a^2-c^2.$$

Vậy điểm $M(x_0;y_0)\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ và $|x_0|\le a$; $|y_0|\le b$.

3. *Tính chất và hình dạng của elip:* Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.

- Trục đối xứng Ox, Oy. Tâm đối xứng O.
- Đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$ và $B_2(0;b)$. $A_1A_2=2a$ gọi là độ dài trục lớn, $B_1B_2=2b$ gọi là độ dài trục bé.
- Tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở PQRS có kích thước 2a và 2b với $b^2=a^2-c^2$.
- Tâm sai: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$



- Hai đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$
- $M(x_0;y_0)\in(E)$: $MF_1=a+ex_0$ và $MF_2=a-ex_0$.

V. Hypebol

1. *Định nghĩa:* Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm F_1, F_2 có $F_1F_2=2c$. Tập hợp các điểm M của mặt phẳng sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$ (2a không đổi và $c>a>0$) là một Hypebol.

- F_1, F_2: là 2 tiêu điểm và $F_1F_2=2c$ là tiêu cự.
- MF_1, MF_2: là các bán kính qua tiêu.

2. *Phương trình chính tắc của hypebol:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=c^2-a^2$.

3. *Tính chất và hình dạng của hypebol (H):*

- Trục đối xứng Ox (trục thực), Oy (trục ảo). Tâm đối xứng O.
- Đỉnh: $A_1(-a;0), A_2(a;0)$. Độ dài trục thực: 2a và độ dài trục ảo: 2b.
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Hai tiệm cận: $y=\pm\frac{b}{a}x$
- Hình chữ nhật cơ sở PQRS có kích thước 2a, 2b với $b^2=c^2-a^2$.
- Tâm sai: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- Hai đường chuẩn: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$

- Độ dài các bán kính qua tiêu của $M(x_0;y_0)\in(H)$:

  +) $MF_1=ex_0+a$ và $MF_2=ex_0-a$ khi $x_0>0$.

  +) $MF_1=-ex_0-a$ và $MF_2=-ex_0+a$ khi $x_0<0$.

- $M(x_0;y_0)\in(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ và ta luôn có $|x_0|\ge a$.

VI. Parabol

1. *Định nghĩa:*

Parabol là tập hợp các điểm M của mặt phẳng cách đều một đường thẳng Δ cố định và một điểm F cố định không thuộc Δ.

Δ: đường chuẩn; F: tiêu điểm và $d(F,\Delta)=p>0$ là tham số tiêu.

2. *Phương trình chính tắc của Parabol:* $y^2=2px$

3. *Hình dạng của Parabol (P):*

- Trục Ox là trục đối xứng, đỉnh O. Tiêu điểm $F(\frac{p}{2};0)$.
- Đường chuẩn $\Delta: x=-\frac{p}{2}$
- $M(x;y)\in(P)$: $MF=x+\frac{p}{2}$ với $x\ge 0$.

B. CÁC BÀI THƯỜNG GẶP

§ 1. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

1. Lập phương trình đường thẳng.

Để lập phương trình đường thẳng Δ ta thường dùng các cách sau

- Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ mà Δ đi qua và một VTPT $\vec{n}=(a;b)$. Khi đó phương trình đường thẳng cần lập là: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.
- Giả sử đường thẳng cần lập $\Delta: ax+by+c=0$. Dựa vào điều kiện bài toán ta tìm được $a=mb, c=nb$. Khi đó phương trình $\Delta: mx+y+n=0$. Phương pháp này ta thường áp dụng đối với bài toán liên quan đến khoảng cách và góc
- Phương pháp quỹ tích: $M(x_0;y_0)\in\Delta: ax+by+c=0 \Leftrightarrow ax_0+by_0+c=0$.

Ví dụ 1.1.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(C): (x-1)^2+(y-2)^2=25.$$

1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(4;6)$,

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) xuất phát từ điểm $N(-6;1)$

3) Từ $E(-6;3)$ vẽ hai tiếp tuyến EA, EB (A, B là tiếp điểm) đến (C). Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=5$.

1) Tiếp tuyến đi qua M và vuông góc với IM nên nhận $\overrightarrow{IM}=(3;4)$ làm VTPT

Nên phương trình tiếp tuyến là: $3(x-4)+4(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-36=0$.

2) Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm.

Do Δ đi qua N nên phương trình có dạng

$\Delta: a(x+6)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ax+by+6a-b=0,\ a^2+b^2\neq 0$ (*)

Ta có:

$$d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|7a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5 \Leftrightarrow |7a+b|=5\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow (7a+b)^2=25(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 24a^2+14ab-24b^2=0 \Leftrightarrow 24\left(\frac{a}{b}\right)^2+12\frac{a}{b}-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{4}b \\ a=-\frac{4}{3}b \end{array}\right.$$

- $a=\frac{3}{4}b$ thay vào (*) ta có: $\frac{3}{4}bx+by+\frac{7}{2}b=0 \Leftrightarrow 3x+4y+14=0$.
- $a=-\frac{4}{3}b$ thay vào (*) ta có: $-\frac{4}{3}bx+by-9b=0 \Leftrightarrow 4x-3y+27=0$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán là:

$3x+4y+14=0$ và $4x-3y+27=0$.

3) Gọi $A(a;b)$. Ta có:

$$\begin{cases} A\in(C) \\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{NA}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b-2)^2=25 \\ (a-1)(a+6)+(b-2)(b-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2a-4b-20=0 \\ a^2+b^2+5a-5b=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 7a-b+20=0$

Từ đó ta suy ra được $A\in\Delta: 7x-y+20=0$.

Tương tự ta cũng có được $B\in\Delta \Rightarrow AB\equiv\Delta \Rightarrow AB: 7x-y+20=0$.

2. *Cách lập phương trình đường tròn.*

Để lập phương trình đường tròn (C) ta thường sử dụng các cách sau

Cách 1: Tìm tâm $I(a;b)$ và bán kính của đường tròn. Khi đó phương trình đường tròn có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Dựa vào giả thiết của bài toán ta tìm được a,b,c. Cách này ta thường áp dụng khi yêu cầu viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm.

Ví dụ 1.1.2. Lập phương trình đường tròn (C), biết

1) (C) đi qua $A(3;4)$ và các hình chiếu của A lên các trục tọa độ.

2) (C) có tâm nằm trên đường tròn $(C_1): (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$ và $\Delta_2: x-7y=0$.

Lời giải.

1) Gọi A₁, A₂ lần lượt là hình chiếu của A lên hai trục Ox, Oy, suy ra $A_1(3;0),\ A_2(0;4)$.

Giả sử $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Do $A, A_1, A_2\in(C)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} -6a-8b+c=-25 \\ -6a+c=-9 \\ -8b+c=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$.

Vậy phương trình (C): $x^2+y^2-3x-4y=0$.

2) Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C), vì $I\in(C_1)$ nên: $(a-2)^2+b^2=\frac{4}{5}$ (1)

Do (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 nên $d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow b=-2a, a=2b$$

- $b=-2a$ thay vào (1) ta có được:

  $(a-2)^2+4a^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow 5a^2-4a+\frac{16}{5}=0$ phương trình này vô nghiệm
- $a=2b$ thay vào (1) ta có: $(2b-2)^2+b^2=\frac{4}{5} \Leftrightarrow b=\frac{4}{5}, a=\frac{8}{5}$.

Suy ra $R=D(I,\Delta_1)=\frac{4}{5\sqrt{2}}$.

Vậy phương trình (C): $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{25}$.

3. *Các điểm đặc biệt trong tam giác.*

Cho tam giác ABC. Khi đó:

- Trọng tâm $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$
- Trực tâm $H:\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$
- Tâm đường tròn ngoại tiếp $I:\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=IC^2\end{cases}$
- Tâm đường tròn nội tiếp $K:\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BK}}{BC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BK}}{AB}\end{cases}$

Chú ý: Có thể tìm K theo cách sau:

* Gọi D là chân đường phân giác trong góc A, ta có: $\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$, từ đây suy ra D

* Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{AB}{BD}\overrightarrow{KD}$ từ đây ta có K.

- Tâm đường tròn bàng tiếp (góc A) $J:\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AJ}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BJ}}{AB}\end{cases}$.

Ví dụ 1.1.3. Cho tam giác ABC có $A(1;3),B(-2;0),C\left(\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$.

1) Tìm tọa độ trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I và trọng tâm G của tam giác ABC. Từ đó suy ra I, G, H thẳng hàng;

2) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.

Lời giải.

1) Ta có $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=-\dfrac{1}{8}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{9}{8}\end{cases}\Rightarrow G\left(-\frac{1}{8};\frac{9}{8}\right)$.

Gọi $H(x;y)$, suy ra

$\overrightarrow{AH}=(x-1;y-3),\overrightarrow{BH}=(x+2;y),\overrightarrow{BC}=\left(\frac{21}{8};\frac{3}{8}\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{3}{8};-\frac{21}{8}\right)$

Mà $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ nên ta có $\begin{cases}7(x-1)+(y-3)=0\\ (x+2)+7y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+y-10=0\\ x+7y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Suy ra $H\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y)$, ta có: $\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IB^2=IC^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+y^2\\ (x+2)^2+y^2=\left(x-\dfrac{5}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{8}\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ \dfrac{21}{4}x+\dfrac{3}{4}y=-\dfrac{111}{32}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{15}{16}\\ y=\dfrac{31}{16}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{15}{16};\frac{31}{16}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{13}{8};-\frac{13}{8}\right),\ \overrightarrow{GI}=\left(-\frac{13}{16};\frac{13}{16}\right)\Rightarrow\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GI}$. Suy ra I,G,H thẳng hàng

2) Gọi $K(x;y)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$\begin{cases}\widehat{KAB}=\widehat{KAC}\\ \widehat{KBC}=\widehat{KBA}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\\ \left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right)\\ \cos\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}}{AK.AB}=\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}}{AK.AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA}}{BK.AB}=\dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC}}{BK.BC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BA}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{BC}}{BC}\end{cases}\ (*)$$

Mà $\overrightarrow{AK}=(x-1;y-3),\overrightarrow{BK}=(x+2;y),\overrightarrow{AB}=(-3;-3)$ nên (*) tương đương với

$$\begin{cases}\dfrac{-3(x-1)-3(y-3)}{3\sqrt{2}}=\dfrac{-\frac{3}{8}(x-1)-\frac{21}{8}(y-3)}{\frac{15\sqrt{2}}{8}}\\ \dfrac{3(x+2)+3y}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{21}{8}(x+2)+\frac{3}{8}y}{\frac{15\sqrt{2}}{8}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=-1\\ x-2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy $K(0;1)$.

Gọi $J(a;b)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Ta có:

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC}\right)\\ \left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{AB}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC}}{AC}\\ \dfrac{\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BC}}{BC}=\dfrac{\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AB}}{AB}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=-1\\ 2a+b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{4}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Vậy $J\left(-\frac{5}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

4. Các đường đặc biệt trong tam giác

4.1. Đường trung tuyến của tam giác: Khi gặp đường trung tuyến của tam giác, ta chủ yếu khai thác tính chất đi qua đỉnh và trung điểm của cạnh đối diện.

4.2. Đường cao của tam giác: Ta khai thác tính chất đi qua đỉnh và vuông góc với cạnh đối diện.

4.3. Đường trung trực của tam giác: Ta khai thác tính chất đi qua trung điểm và vuông góc với cạnh đó.

4.4. Đường phân giác trong: Ta khai thác tính chất nếu M thuộc AB, M′ đối xứng với M qua phân giác trong góc A thì M′ thuộc AC.

Ví dụ 1.1.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(-1;-1), đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Lời giải

Kí hiệu $d_1: x-y+2=0$, $d_2: 4x+3y-1=0$.

Gọi H' là điểm đối xứng với H qua d_1. Khi đó $H'\in AC$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua H và vuông góc với d_1.

Phương trình của $\Delta: x+y+2=0$. Suy ra $\Delta\cap d_1=I:\begin{cases}x+y+2=0\\ x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow I(-2;0)$

Ta có I là trung điểm của HH' nên H'(-3;1).

Đường thẳng AC đi qua H' và vuông góc với d_2 nên có phương trình:

$3x-4y+13=0$.

Nên $AC\cap d_1=A:\begin{cases}x-y+2=0\\ 3x-4y+13=0\end{cases}\Rightarrow A(5;7)$.

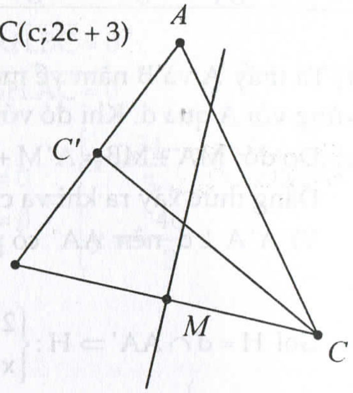
Vì CH đi qua H và vuông với AH, suy ra phương trình của CH:

$$3x+4y+7=0$$

Do đó $C:\begin{cases}3x+4y+7=0\\ 3x-4y+13=0\end{cases}\Rightarrow C(-\frac{10}{3};\frac{3}{4})$.

Ví dụ 1.1.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết A(5;2). Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến CC′ lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi $d: x+y-6=0$, $CC': 2x-y+3=0$. Ta có: $C(c;2c+3)$

Phương trình $BC: x-y+c+3=0$

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra M:

$$\begin{cases}x+y-6=0\\ x-y+c+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3-c}{2}\\ y=\dfrac{c+9}{2}\end{cases}$$

Suy ra $B\left(3-2c;6-c\right)\Rightarrow C'(4-c;4-\frac{c}{2})$

Mà $C'\in CC'$ nên ta có: $2(4-c)-(4-\frac{c}{2})+3=0\Leftrightarrow-\frac{3}{2}c+7=0\Rightarrow c=\frac{14}{3}$.

Vậy $B\left(-\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{14}{3};\frac{37}{3}\right)$.

5. Một số bài toán dựng hình cơ bản.

5.1. Hình chiếu vuông góc H của điểm A lên đường thẳng Δ

- Lập đường thẳng d đi qua A và vuông góc với Δ
- $H=d\cap\Delta$

5.2. Dựng A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ

- Dựng hình chiếu vuông góc H của A lên Δ
- Lấy A' đối xứng với A qua H: $\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A\\ y_{A'}=2y_H-y_A\end{cases}$.

5.3. Dựng đường tròn (C′) đối xứng với (C) (có tâm I, bán kính R) qua đường thẳng Δ

- Dựng I′ đối xứng với I qua đường thẳng Δ
- Đường tròn (C′) có tâm I', bán kính R.

Chú ý: Giao điểm của (C) và (C′) chính là giao điểm của và Δ.

5.4. Dựng đường thẳng d′ đối xứng với d qua đường thẳng Δ.

- Lấy hai điểm M,N thuộc d. Dựng M',N' lần lượt đối xứng với M, N qua Δ
- $d'\equiv M'N'$.

Ví dụ 1.1.6. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x-2y-3=0$ và hai điểm $A(3;2)$, $B(-1;4)$.

1) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất,

2) Viết phương trình đường thẳng d' sao cho đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d và d'.

Lời giải.

1) Ta thấy A và B nằm về một phía so với đường thẳng d. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. Khi đó với mọi điểm M thuộc d, ta luôn có: $MA=MA'$

Do đó: $MA+MB=A'M+MB\ge A'B$.

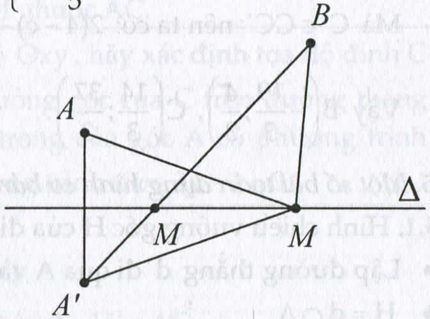
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M=A'B\cap d$.

Vì $A'A\perp d$ nên AA' có phương trình: $2x+y-8=0$

Gọi $H=d\cap AA'\Rightarrow H:\begin{cases}2x+y-8=0\\x-2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{19}{5}\\y=\dfrac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{2}{5}\right)$.

Vì H là trung điểm của AA' nên

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=\dfrac{23}{5}\\y_{A'}=2y_H-y_A=\dfrac{6}{5}\end{cases}\Rightarrow A'\left(\dfrac{23}{5};\dfrac{6}{5}\right).$$



Suy ra $\overrightarrow{A'B}=\left(-\dfrac{28}{5};\dfrac{26}{5}\right)$, do đó phương trình $A'B: 13x+14y-43=0$

Nên $M:\begin{cases}x-2y-3=0\\13x+14y-43=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{16}{5}\\y=\dfrac{1}{10}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{1}{10}\right)$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases}x-2y-3=0\\3x+4y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$, suy ra $d\cap\Delta=I(1;-1)$

Vì Δ là phân giác của góc hợp bởi giữa hai đường thẳng d và d' nên d và d' đối xứng nhau qua Δ, do đó $I\in d'$.

Lấy $E(3;0)\in d$, ta tìm được $F\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{16}{5}\right)$ là điểm đối xứng với E qua Δ ta có $F\in d'$. Suy ra $\overrightarrow{FI}=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{5}\right)$, do đó phương trình $d': 11x-2y-13=0$.

BÀI TẬP

Bài 1.1.1. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(-3;-1)$

1) Tìm tọa độ trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

2) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

1) Gọi $H(x;y)$ là trực tâm tam giác ABC, ta có: $\begin{cases}AH.BC=0\\BH.AC=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(-7)+(y-1)(-4)=0\\(x-4)(-5)+(y-3)(-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+4y-18=0\\5x+2y-26=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{34}{3}\\y=-\dfrac{46}{3}\end{cases}.$$

Vậy $H\left(\dfrac{34}{3};-\dfrac{46}{3}\right)$

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có: $\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=(x-4)^2+(y-3)^2\\(x-2)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(y+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\8x+4y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{25}{4}\\y=\dfrac{45}{4}\end{cases}.$$

Vậy $I\left(-\dfrac{25}{4};\dfrac{45}{4}\right)$

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R=IA=\dfrac{\sqrt{2770}}{4}$

Nên nó phương trình là: $\left(x+\dfrac{25}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{45}{4}\right)^2=\dfrac{1385}{8}$.

Bài 1.1.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(3;2)$ và phương trình hai đường trung tuyến $BM: 3x+4y-3=0, CN: 3x-10y-17=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác, suy ra tọa độ của G là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+4y-3=0\\3x-10y-17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=-1\end{cases}\Rightarrow G\left(\dfrac{7}{3};-1\right).$$

Gọi E là trung điểm của BC, suy ra $\overrightarrow{EA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{GA}\Rightarrow E(2;-\frac{5}{2})$.

Giả sử $B(a;b)$, suy ra $C(4-a;-5-b)$. Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases}3a+4b-3=0\\3(4-a)-10(-5-b)-17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+4b-3=0\\-3a+10b+45=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}.$$

Vậy $B(5;-3),C(-1;-2)$.

Bài 1.1.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(-3;0)$ và phương trình hai đường phân giác trong $BD:x-y-1=0,CE:x+2y+17=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Hướng dẫn giải

Gọi A_1 đối xứng với A qua BD, suy ra $A_1\in BC$ và $A_1(1;-4)$

A_2 đối xứng với A qua CE, suy ra $A_2\in BC$ và $A_2(-\frac{43}{5};-\frac{56}{5})$.

Suy ra phương trình $BC:3x-4y-19=0$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y-1=0\\3x-4y-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-15\\y=-16\end{cases}\Rightarrow B(-15;-16)$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+2y+17=0\\3x-4y-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-7\end{cases}\Rightarrow C(-3;-7)$.

Vậy $B(-15;-16),C(-3;-7)$.

Bài 1.1.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(5;-3)$ và phương trình đường cao $AA':x-y+2=0$, đường trung tuyến $BM:2x+5y-13=0$. Tính tọa độ các điểm A, B.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình $BC:x+y-2=0$

Suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y-2=0\\2x+5y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}\Rightarrow B(-1;3)$.

Gọi $A(a;a+2)$, suy ra tọa độ của trung điểm AC là $M\left(\frac{a+5}{2};\frac{a-1}{2}\right)$

Mà $M\in BM$ nên $2\frac{a+5}{2}+5\frac{a-1}{2}-13=0\Leftrightarrow a=3\Rightarrow A(3;5)$.

Vậy $A(3;5),B(-1;3)$.

Bài 1.1.5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(1;-3)$ và phương trình đường cao $AD:2x-y+1=0$, đường phân giác $CE:x+y-2=0$ .Tính tọa độ các điểm A, C.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình $BC:x+2y+5=0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y-2=0\\x+2y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-7\end{cases}\Rightarrow C(9;-7)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua CE, suy ra $B'(5;1)$ và $B'\in AC$

Do đó, ta có phương trình $AC:2x+y-11=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y+1=0\\2x+y-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\y=6\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{5}{2};6\right)$.

Vậy $A\left(\frac{5}{2};6\right),C(9;-7)$.

Bài 1.1.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M (2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Hướng dẫn giải

Tọa độ A thỏa mãn hệ: $\begin{cases}7x-2y-3=0\\6x-y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$

Vì B đối xứng với A qua M nên suy ra $B=(3;-2)$.

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với đường thẳng: $6x-y-4=0$ nên suy ra

Phương trình $BC:x+6y+9=0$.

Tọa độ trung điểm N của BC thỏa mãn hệ: $\begin{cases}7x-2y-3=0\\x+6y+9=0\end{cases}\Rightarrow N\left(0;-\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{MN}=(-4;-3)$.

Phương trình đường thẳng $AC:3x-4y+5=0$.

Bài 1.1.7. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

1) Lập phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua $A(3;-6)$

2) Từ điểm $D(-4;5)$ vẽ đến (C) hai tiếp tuyến DM, DN (M, N là tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng MN.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=5$.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

1) Giả sử $\Delta: ax+by+c=0$ là tiếp tuyến của (C)

Do $B\in\Delta$ nên $3a-6b+c=0\Rightarrow c=6b-3a$

Δ là tiếp tuyến của (C) nên $d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{|2a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\Leftrightarrow\dfrac{|-a+7b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5$

$$\Leftrightarrow 12a^2+7ab-12b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3}{4}b\\ a=-\dfrac{4}{3}b\end{array}\right..$$

Từ đó, ta có được phương trình tiếp tuyến là:

$3x+4y+15=0$ và $4x-3y-30=0$.

2) Gọi $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, ta có: $\begin{cases}T\in(C)\\ \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IT}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-2)^2+(y_0-1)^2=25\\ (x_0-4)(x_0-2)+(y_0+5)(y_0-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-4x_0-2y_0=20\\ x_0^2+y_0^2-6x_0+4y_0=-3\end{cases}\Rightarrow 2x_0-6y_0-23=0$$

Vậy phương trình $MN: 2x-6y-23=0$.

§ 2. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

Bài toán cơ bản của phương pháp tọa độ trong mặt phẳng là bài toán xác định tọa độ của một điểm. Chẳng hạn, để lập phương trình đường thẳng cần tìm một **điểm** đi qua và VTPT, với phương trình đường tròn thì ta cần xác định **tâm** và bán kính....Chúng ta có thể gặp bài toán tìm tọa độ của điểm được hỏi trực tiếp hoặc gián tiếp.

- Về phương diện hình học tổng hợp thì để xác định tọa độ một điểm, ta thường chứng minh điểm đó thuộc hai hình (H) và (H'). Khi đó điểm cần tìm chính là giao điểm của (H) và (H').
- Về phương diện đại số, để xác định tọa độ của một điểm (gồm hai tọa độ) là bài toán đi tìm hai ẩn. Do đó, chúng ta cần xác định được hai phương trình chứa hai ẩn và giải hệ phương trình này ta tìm được tọa độ điểm cần tìm. Khi thiết lập phương trình chúng ta cần lưu ý:

+) Tích vô hướng của hai véc tơ cho ta một phương trình,

+) Hai đoạn thẳng bằng nhau cho ta một phương trình,

+) Hai véc tơ bằng nhau cho ta hai phương trình,

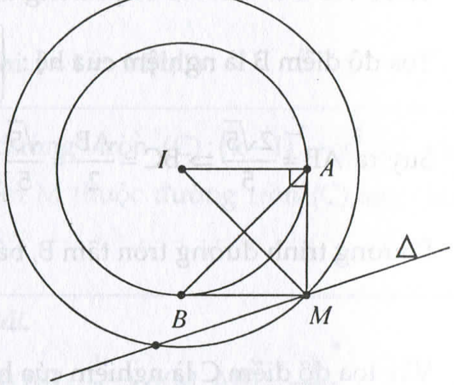
THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

+) Nếu điểm $M\in\Delta: ax+by+c=0, a\neq 0$ thì $M\left(\dfrac{-bm-c}{a};m\right)$, lúc này tọa độ của M chỉ còn một ẩn và ta chỉ cần tìm một phương trình.

Ví dụ 1.2.1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: x-3y-6=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ, sao cho từ M vẽ được hai tiếp tuyến MA, MB (A,B là tiếp điểm) thỏa ΔABM là tam giác vuông.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=2$.



Vì ΔAMB vuông và IM là đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ nên $\widehat{AMI}=45^0$

Trong tam giác vuông IAM, ta có: $IM=2\sqrt{2}$, suy ra M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R'=2\sqrt{2}$.

Mặt khác $M\in\Delta$ nên M là giao điểm của Δ và (I,R'). Suy ra tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-3y-6=0\\ (x-1)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y+6\\ (3y+5)^2+(y-1)^2=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y+6\\ 5y^2+14y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1, x=3\\ y=-\dfrac{9}{5}, x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm $M_1(3;-1)$ và $M_2\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{9}{5}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1.2.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các đường thẳng $d_1: x+y+3=0$, $d_2: x-y-4=0$, $d_3: x-2y=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

Lời giải

Ta có $M\in d_3$, suy ra $M(2y;y)$. Suy ra $d(M,d_1)=\dfrac{|3y+3|}{\sqrt{2}}; d(M,d_2)=\dfrac{|y-4|}{\sqrt{2}}$

Theo giả thiết ta có: $d(M,d_1)=2d(M,d_2)\Leftrightarrow\dfrac{|3y+3|}{\sqrt{2}}=2.\dfrac{|y-4|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3y+3=2y-8 \\ 3y+3=-2y+8 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=-11; y=1.$$

- Với $y=-11 \Rightarrow M(-22;11)$.
- Với $y=1 \Rightarrow M(2;1)$.

Ví dụ 1.2.3. Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(0; 2) và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB=2BC$.

Lời giải

Ta có $AB \perp d$ nên AB có phương trình : $2x+y-2=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Suy ra $AB=\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow BC=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Phương trình đường tròn tâm B, bán kính $BC=\frac{\sqrt{5}}{5}$ là: $\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$

Vậy tọa độ điểm C là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ \left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=\frac{4}{5}, y=\frac{7}{5} \end{array}\right.$

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$, $C(0;1)$ và $B\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$, $C\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Ví dụ 1.2.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(2; 2) và hai đường thẳng: $d_1: x+y-2=0$, $d_2: x+y-8=0$. Tìm tọa độ điểm B, C lần lượt thuộc d₁, d₂ sao cho tam giác ABC vuông tại A.

Lời giải

Vì $B \in d_1 \Rightarrow B(b;2-b); C \in d_2 \Rightarrow C(c;c-8)$.

Theo đề bài ta có hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ AB=AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4)=2 \\ (b-1)^2-(c-4)^2=3 \end{cases}$

Đặt $x=b-1; y=c-4$ ta có : $\begin{cases} xy=2 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy $B(3;-1); C(5;3)$ hoặc $B(-1;3), C(3;5)$.

Ví dụ 1.2.5. Cho parabol $(P): y^2=x$ và hai điểm A(9; 3), B(1; −1) thuộc (P). Gọi M là điểm thuộc cung AB của (P) (phần của (P) bị chắn bởi dây AB). Xác định tọa độ điểm M nằm trên cung AB sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Phương trình $AB: x-2y-3=0$

Vì $M \in (P) \Rightarrow M(t^2;t)$ từ giả thiết suy ra $-1<t<3$

Tam giác MAB có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow d(M, AB)$ lớn nhất

Mà $d(M;AB)=\frac{\left|t^2-2t-3\right|}{\sqrt{5}}, t \in (-1;3)$.

Suy ra $\max d(M,AB)=\frac{4}{\sqrt{5}}$ đạt được khi $t=1 \Rightarrow M(1;1)$.

Ví dụ .2.6. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2+y^2=2$ và hai điểm $A(1;-1)$, $B(2;2)$. Tìm tọa điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác MAB bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $AB=\sqrt{10}$ và $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}d(M,AB).AB=\frac{1}{2} \Rightarrow d(M,AB)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Lại có $\overrightarrow{AB}=(1;3)$ nên $\vec{n}=(3;-1)$ là VTPT của đường thẳng AB

Suy ra phương trình $AB: 3(x-1)-(y+1)=0$ hay $3x-y-4=0$.

Gọi $M(a;b) \in (C) \Rightarrow (a-1)^2+b^2=2$

Khi đó $d(M;AB)=\frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|3a-b-4|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |3a-b-4|=1$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a-1)^2+b^2=2 \\ |3a-b-4|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+b^2=2 \\ 3a-b-4=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (a-1)^2+b^2=2 \\ 3a-b-4=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+b^2=2 \\ b=3a-5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (a-1)^2+b^2=2 \\ b=3a-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(3a-5)^2=2 \\ b=3a-5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (a-1)^2+(3a-3)^2=2 \\ b=3a-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2-16a+12=0 \\ b=3a-5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 5a^2-10a+4=0 \\ b=3a-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{12}{5}, a=\dfrac{4}{5} \\ b=3a-5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{5} \\ b=3a-3 \end{cases}$$

Vậy có bốn điểm thỏa điều kiện bài toán là:

$$M_1\left(\frac{12}{5};\frac{11}{5}\right),\ M_2\left(\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right),\ M_3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5};\frac{-3\sqrt{5}}{5}\right) \text{ và } M_4\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5};\frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

🕮 BÀI TẬP

Bài 1.2.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2+y^2=1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO}=30^0$.

Hướng dẫn giải

Gọi điểm $M(a;b)$. Do $M\in(C)$ nên $(a-1)^2+b^2=1$.

Mặt khác $O\in(C)\Rightarrow IO=IM=1$.

Tam giác IMO có $\widehat{OIM}=120^0$

nên $OM^2=IO^2+IM^2-2IO.IM.\cos120^0 \Leftrightarrow a^2+b^2=3$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ : $\begin{cases} (a-1)^2+b^2=1 \\ a^2+b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Vậy $M=\left(\dfrac{3}{2};\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 1.2.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y^2=x$ và điểm I(0; 2). Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN}$.

Hướng dẫn giải

Vì $M,N\in(P)$ nên ta có $M(m^2;m),N(n^2;n)$.

Suy ra $\overrightarrow{IM}=\left(m^2;m-2\right),\overrightarrow{IN}=\left(n^2;n-2\right)$. Do đó:

$$\overrightarrow{IM}=4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=4n^2 \\ m-2=4(n-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4n-2 \\ (2n-1)^2=n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} \vee \begin{cases} n=\dfrac{1}{3} \\ m=-\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$$M(4;2),N(1;1) \text{ hoặc } M\left(\frac{4}{9};-\frac{2}{3}\right),N\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right).$$

Bài 1.2.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;2)$, các đường thẳng $d_1: x+y-3=0$ và: $d_2: x+y-9=0$. Tìm tọa độ điểm $B\in d_1$, và $C\in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải

Vì $B\in d_1: x+y-3=0$ nên $B(b;3-b)$, $C\in d_2: x+y-9=0$ nên $C(c;9-c)$.

Để tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\begin{cases} AB=AC \\ AB\perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2=AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$

Hay $\begin{cases} (b-3)^2+(b-1)^2=(c-3)^2+(c-7)^2 \\ (b-3)(c-3)+(1-b)(7-c)=0 \end{cases}$.

Đặt $u=b-3, v=c-2$, ta có: $\begin{cases} u^2+(u+2)^2=(v-1)^2+(v-5)^2 \\ u(v-1)+(u+2)(v-5)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+1)^2=(v-3)^2+3 \\ uv-3u+v-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3u+5}{u+1} \\ (u+1)^2=\dfrac{4}{(u+1)^2}+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3u+5}{u+1} \\ (u+1)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=4 \end{cases} \vee \begin{cases} u=-3 \\ v=2 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán là:

$B(4;-1),C(6;3)$ hoặc $B(0;3),C(4;5)$.

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể giải theo cách khác như sau:

Tịnh tiến hệ trục tọa độ Oxy về hệ tục XAY theo véc tơ $\overrightarrow{OA}$, ta có công thức dời trục: $\begin{cases} x=X+3 \\ y=Y+2 \end{cases}$.

Trong hệ trục mới, ta có phương trình của $d_1: X+Y+2=0,\ d_2: X+Y-4=0$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên phép quay $Q_{(A,\pm90^0)}: B\to C$

Mà $B \in d_1 \Rightarrow C \in d_1^{'} = Q_{(A;\pm 90^0)}(d_1)$, do đó $C \equiv d_2 \cap d_1^{'}$.

- Xét phép quay $Q_{(A;90^0)}$, ta có phương trình $d_1^{'}: X - Y - 2 = 0$

Do đó tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} X - Y - 2 = 0 \\ X + Y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

- Xét phép quay $Q_{(A;-90^0)}$, ta có phương trình $d_1^{'}: X - Y + 2 = 0$

Do đó tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} X - Y + 2 = 0 \\ X + Y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được B, C.

Bài 1.2.4. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho ΔABC với $A(2;3), B(2;1), C(6;3)$. Gọi D là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với BC. Tìm tất cả các điểm M thuộc đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ sao cho : $S_{MDC} = 2S_{ADB}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;2), \overrightarrow{AC} = (4;0), \overrightarrow{BC} = (4;2)$

Vì $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow D(\dfrac{10}{3};\dfrac{5}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(-\dfrac{8}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Phương trình AB: $x - 2 = 0$,

nên $d(D, AB) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AB.d(D, AB) = \dfrac{1}{2}.2.\dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}$

Phương trình $DC: x - 2y = 0$. Gọi $M(a;b) \Rightarrow (a-3)^2 + (b-1)^2 = 25 \quad (1)$

Mặt khác:

$$S_{\Delta MCD} = 2S_{\Delta ABD} \Rightarrow \frac{1}{2}CD.d(M, CD) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\sqrt{5}.\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow |a - 2b| = 4$$

$\Leftrightarrow a = 2b + 4$ hoặc $a = 2b - 4$

- $a = 2b - 4$ thay vào (1) ta có được: $(2b-7)^2 + (b-1)^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 - 6b + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow M(-2;1) \\ b = 5 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow M(6;5) \end{array}\right.$$

- $a = 2b + 4$ thay vào (1) ta có được: $(2b+1)^2 + (b-1)^2 = 25 \Leftrightarrow 5b^2 + 2b - 23 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \dfrac{-1+2\sqrt{29}}{5} \Rightarrow a = \dfrac{18+4\sqrt{29}}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{-1+2\sqrt{29}}{5};\dfrac{18+4\sqrt{29}}{5}\right) \\ b = \dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5} \Rightarrow a = \dfrac{18-4\sqrt{29}}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5};\dfrac{18-4\sqrt{29}}{5}\right) \end{array}\right.$$

Bài 1.2.5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - 3y - 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4y = 0$. Tìm M thuộc d và N thuộc (C) sao cho chúng đối xứng qua $A(3;1)$.

Hướng dẫn giải

Vì $M \in d \Rightarrow M(3m + 4; m)$. Do N đối xứng với M qua A nên $N(2 - 3m; 2 - m)$

Mà $N \in (C)$

nên $(2 - 3m)^2 + (2 - m)^2 - 4(2 - m) = 0 \Leftrightarrow 10m^2 - 12m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = \dfrac{6}{5}$

Vậy có hai cặp điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$M(4;0), N(2;2)$ và $M\left(\dfrac{38}{5};\dfrac{6}{5}\right), N\left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{4}{5}\right)$.

Bài 1.2.6. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1;4)$. Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + (y-5)^2 = 13$ và $(C_2): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ sao cho tam giác MAN vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải

Xét phép quay $Q_{(A;\pm 90^0)}: M \to N$ và $(C_1) \to (C_1^{'})$

Mà $M \in (C_1) \Rightarrow N \in (C_1^{'}) \Rightarrow N \in (C_2) \cap (C_1^{'})$.

- Với $Q_{(A;90^0)}$, ta có phương trình $(C_1^{'}): x^2 + (y-5)^2 = 13$

Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 = 13 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 12 = 0 \\ x = 3y - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 53y + 134 = 0 \\ x = 3y - 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3\sqrt{129}}{10} \\ y = \dfrac{53+\sqrt{129}}{10} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1-3\sqrt{129}}{10} \\ y = \dfrac{53-\sqrt{129}}{10} \end{cases}$$

Trường hợp này có hai bộ điểm:

$M\left(\dfrac{23+\sqrt{129}}{10};\dfrac{51-3\sqrt{129}}{10}\right), N\left(\dfrac{-1+3\sqrt{129}}{10};\dfrac{53+\sqrt{129}}{10}\right)$

Và $M\left(\dfrac{23-\sqrt{129}}{10};\dfrac{51+3\sqrt{129}}{10}\right), N\left(\dfrac{-1-3\sqrt{129}}{10};\dfrac{53-\sqrt{129}}{10}\right)$.

- Với $Q_{(A;-90^0)}$, ta có phương trình $(C_1^{'}):(x-2)^2+(y-3)^2=13$

Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=13\\(x-1)^2+(y-2)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$

Trường hợp này có hai bộ điểm: $M(-1;7),N(4;6)$ và $M(0;8),N(5;5)$.

Bài 1.2.7. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-4)^2=\frac{25}{9}$ và đường thẳng $d:5x+2y-11=0$. Tìm điểm C trên d sao cho tam giác ABC có trọng tâm G nằm trên đường tròn (C) biết $A(1;2),B(3;-2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C\in d$ nên ta có tọa độ $C\left(c;\frac{11-5c}{2}\right)$

Tọa độ trong tâm $G\left(\frac{c+4}{3};\frac{11-5c}{6}\right)$. Do G nằm trên đường tròn (C) nên ta có phương trình: $\frac{(c-2)^2}{9}+\frac{(5c+13)^2}{36}=\frac{25}{9}\Leftrightarrow 29c^2+114c+85=0\Leftrightarrow c=-1,c=-\frac{85}{29}$

Vậy có hai điểm C thỏa yêu cầu bài toán là: $C_1(-1;8)$, $C_2\left(-\frac{85}{29};\frac{372}{29}\right)$.

Bài 1.2.8. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d:x-y+1=0$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y=0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại A và B, sao cho $\widehat{AMB}=60^0$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn có tâm $I(-1;2)$ và bán kính: $R=\sqrt{5}$.

Tam giác AMB là tam giác đều và MI là phân giác góc $\widehat{AMB}$ nên $\widehat{IMA}=30^0$

Do đó: $MI=\frac{IA}{\sin 30^0}=2\sqrt{5}\Rightarrow IM^2=20$

Do $M\in d$ nên suy ra $M(x_0;x_0+1)$

Khi đó ta có: $MI^2=(x_0+1)^2+(x_0-1)^2=20\Leftrightarrow x_0^2=9\Leftrightarrow x_0=3;\ x_0=-3$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán: $(3;4);(-3;-2)$

Bài 1.2.9. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $\Delta:3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua $I(2;\frac{5}{2})$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng15.

Hướng dẫn giải

Gọi $A\left(a;\frac{3a+4}{4}\right)\Rightarrow B\left(4-a;\frac{16-3a}{4}\right)$.

Khi đó diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,\Delta)=3AB$

Theo giả thiết ta có: $AB=5\Leftrightarrow(4-2a)^2+\left(\frac{6-3a}{2}\right)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a=0\end{array}\right.$

Vậy hai điểm cần tìm là $A(0;1)$ và $B(4;4)$.

Bài 1.2.10. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho elíp $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai điểm $A(3;-2)$, $B(-3;2)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình đường thẳng $AB:2x+3y=0$

Gọi $C(x;y)$ với $x>0,y>0$. Khi đó ta có $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=\frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}|2x+3y|=3\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right|$

$$\leq 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$. Vậy $C\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$.

§ 3. NHÓM CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH BÌNH HÀNH

Khi giải các bài toán về hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông, chúng ta cần chú ý đến tính chất đối xứng. Chẳng hạn, giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình bình hành; hai đường chéo của hình thoi là trục đối xứng....

Ví dụ 1.3.1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng d₁: x – 2y + 1 = 0, d₂: 2x + 3y = 0. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết A thuộc đường thẳng d₁, C thuộc đường thẳng d₂ và hai điểm B, D thuộc trục Ox.

Lời giải.

Vì $A \in d_1, C \in d_2$ nên $A(2a-1;a), C(3c;-2c)$, suy ra $I\left(\frac{2a+3c-1}{2};\frac{a-2c}{2}\right)$ là trung điểm AC

Do ABCD là hình vuông nên I là trung điểm của BD, hay $I \in Ox$.

Do đó $a = 2c$.

Mặt khác $AC \perp BD \equiv Ox$ nên suy ra $2a - 1 = 3c \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó, ta tìm được $A(3;2),\ C(3;-2),\ I(3;0)$.

Vì $B \in Ox \Rightarrow B(b;0)$, mà $IB = IA = 2 \Rightarrow |b-3| = 2 \Leftrightarrow b = 5, b = 1$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD là:

$A(3;2),\ B(1;0),\ C(3;-2),\ D(5;0)$ hoặc $A(3;2),\ B(5;0),\ C(3;-2),\ D(1;0)$.

Ví dụ 1.3.2. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $I(1;1),\ J(-2;2),\ K(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm hình vuông, J thuộc cạnh AB và K thuộc cạnh CD.

Lời giải.

Gọi J' đối xứng với J qua I, ta có $J'(4;0)$ và $J' \in CD$.

Ta có: $\overrightarrow{KJ'} = (2;2)$, suy ra phương trình $CD: x - y - 4 = 0$.

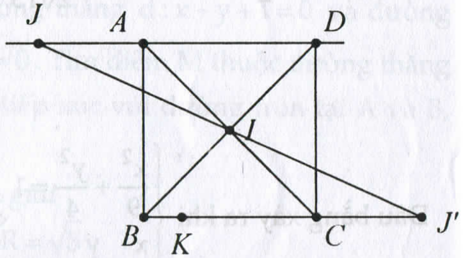
Vì AB / /CD nên phương trình

$AB: x - y + 4 = 0$.

Do $d(I,AB) = 2\sqrt{2}$ nên suy ra

$AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow IA = 4$

$A \in AB \Rightarrow A(a;4+a)$, do đó



$IA = 4 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a+3)^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = -3$

- $a = 1$, ta có $A(1;3),\ B(-3;1),\ C(1;-1),\ D(5;1)$
- $a = -3$, ta có $A(-3;1),\ B(1;3),\ C(5;1),\ D(1;-1)$.

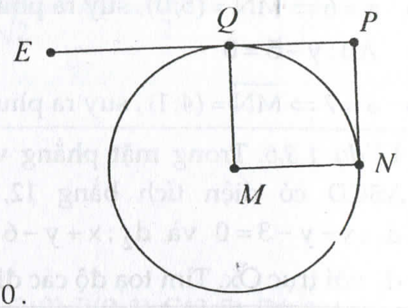
Ví dụ 1.3.3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông MNPQ, biết M trùng với tâm của đường tròn (C); hai đỉnh N, Q thuộc đường tròn (C); đường thẳng PQ đi qua $E(-3;6)$ và $x_Q > 0$.

Lời giải.

Ta có $M(2;1)$ và EQ là tiếp tuyến của (C).

Phương trình EQ có dạng:

$a(x+3) + b(y-6) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 3a - 6b = 0$



Vì $d(M,EQ) = \sqrt{10}$

nên ta có: $\frac{|5a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow (5a-5b)^2 = 10(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3b, b = 3a$

- $a = 3b$, ta có phương trình $EQ: 3x + y + 3 = 0$.

Khi đó tọa độ Q là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10\\ 3x + y + 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\ y = 0\end{cases}$.

Trường hợp này ta loại vì $x_Q > 0$.

- $b = 3a$, ta có phương trình $EQ: x + 3y - 15 = 0$. Khi đó tọa độ Q là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10\\ 3x + y + 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3\\ y = 4\end{cases} \Rightarrow Q(3;4)$.

Ta có $P(15-3x;x)$ và $QP = MQ \Rightarrow (12-3x)^2 + (4-x)^2 = 10 \Leftrightarrow x = 3, x = 5$

- $x = 3$, ta có $P(6;3)$, suy ra tâm của hình vuông $I(4;2)$ nên $N(5;0)$
- $x = 5$, ta có $P(0;5)$, suy ra tâm của hình vuông $I(1;3)$ nên $N(-1;2)$.

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$M(2;1), N(5;0), P(6;3), Q(3;4)$ và $M(2;1), N(-1;2), P(0;5), Q(3;4)$.

Ví dụ 1.3.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Vì $E \in d \Rightarrow E(a;5-a) \Rightarrow \overrightarrow{IE} = (a-6;3-a)$.

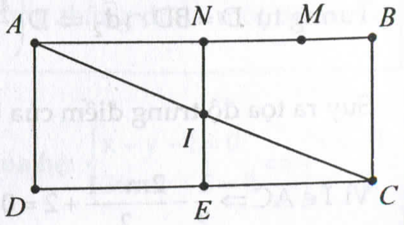
Gọi N là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của EN nên :

$N: \begin{cases}x_N = 2x_I - x_E = 12 - a\\ y_N = 2y_I - y_E = a - 1\end{cases} \Rightarrow N(12-a;a-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (11-a;a-6)$.

Vì $E \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE} = 0$

$\Leftrightarrow (11-a)(a-6) + (a-6)(3-a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = 6\\ a = 7\end{array}\right.$.



- $a=6\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(5;0)$, suy ra phương trình $AB: y-5=0$
- $a=7\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(4;1)$, suy ra phương trình $AB: x-4y+19=0$.

Ví dụ 1.3.5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của AB là giao điểm của d_1 với trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Lời giải.

Ta có $d_1\cap d_2 = I:\begin{cases}x-y-3=0\\x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$

Gọi M là giao của đường thẳng d_1 với Ox, suy ra $M(3;0)$.

Vì $AB\perp MI$ nên suy ra phương trình $AB: x+y-3=0$

$$AD=2MI=3\sqrt{2}\Rightarrow AB=\frac{S_{ABCD}}{AD}=2\sqrt{2}\Rightarrow AM=2$$

Mà $A\in AB\Rightarrow A(a;3-a)\Rightarrow AM^2=2\Leftrightarrow (a-3)^2=1\Leftrightarrow a=2, a=4$

Ta chọn $A(2;1), B(4;-1)$.

Do I là tâm của hình chữ nhật nên $C(7;2)$, $D(5;4)$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật là: $A(2;1)$, $B(4;-1)$, $C(7;2)$, $D(5;4)$.

Ví dụ 1.3.6. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1: 4x+y-9=0$, $d_2: 2x-y+6=0$, $d_3: x-y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết hình thoi ABCD có diện tích bằng 15, các đỉnh A, C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.

Lời giải.

Vì $BD\perp AC$ nên phương trình $BD: y=-x+m$

$B=BD\cap d_1$, suy ra $B\begin{cases}y=-x+m\\4x+y-9=0\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{9-m}{3};\frac{4m-9}{3}\right)$

Tương tự $D=BD\cap d_2\Rightarrow D\left(\frac{m-6}{3};\frac{2m+6}{3}\right)$.

Suy ra tọa độ trung điểm của BD là $I\left(\frac{1}{2};\frac{2m-1}{2}\right)$.

Vì $I\in AC\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{2m-1}{2}+2=0\Leftrightarrow m=3$. Suy ra $B(2;1), D(-1;4), I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Ta có: $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{15}{2}\Rightarrow AI=\frac{15}{BD}=\frac{5}{\sqrt{2}}\Rightarrow AI^2=\frac{25}{2}$

Mà $A\in d_3\Rightarrow A(a;a+2)\Rightarrow AI^2=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$

nên ta có: $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow a=3, a=-2$

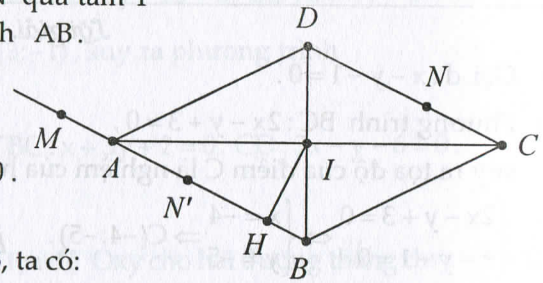
Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi là:

$A(3;5), B(2;1), C(-2;0), D(-1;4)$ hoặc $A(-2;0), B(2;1), C(3;5), D(-1;4)$.

Ví dụ 1.3.7. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm $I(2;1)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB; điểm $N(0;7)$ thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

Lời giải.

Gọi N' là điểm đối xứng của N qua tâm I thì ta có $N'(4;-5)$ và N' thuộc cạnh AB.



Suy ra $\overrightarrow{MN'}=\left(4;-\frac{16}{3}\right)$ nên phương trình $AB: 4x+3y-1=0$.

Vì $AC=2BD$ nên $AI=2BI$.

Gọi H là hình chiếu của I lên AB, ta có:

$$IH=d(I,AB)=\frac{|8+3-1|}{5}=2 \text{ và } \frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{5}{4IB^2}\Rightarrow IB=\frac{IH\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

Mặt khác $B\in AB\Rightarrow B\left(b;\frac{1-4b}{3}\right), b>0\Rightarrow IB^2=(b-2)^2+\left(\frac{4b+2}{3}\right)^2=5\Leftrightarrow b=1$

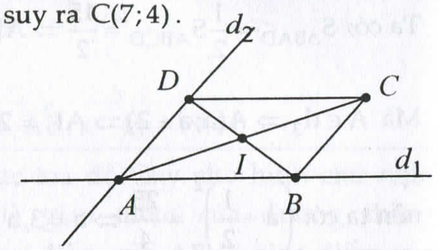
Vậy $B(1;-1)$.

Ví dụ 1.3.8. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng d_1: c + y − 1 = 0, d_2: 3x − y + 5 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành ABCD, biết I(3;3) là giao điểm của hai đường chéo; hai cạnh của hình bình hành nằm trên hai đường thẳng d_1, d_2 và giao điểm của hai đường thẳng đó là một đỉnh của hình bình hành.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+y-1=0\\3x-y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$.

Ta giả sử $A(-1;2)$ và $AB \equiv d_1, AD \equiv d_2$, suy ra $C(7;4)$.



Gọi d là đường thẳng đi qua I và song song với AB, suy ra phương trình $d: x+y-6=0$.

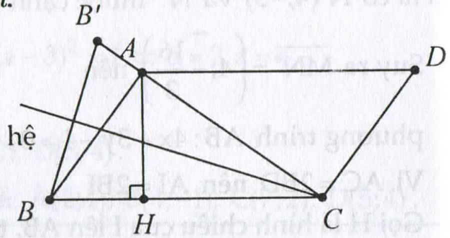
Tọa độ giao điểm của d và AD:

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ 3x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{23}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{23}{4}\right) \text{ là trung điểm của AD}.$$

Do đó $D\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{19}{2}\right)$, suy ra $B\left(\dfrac{9}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$.

Ví dụ 1.3.9. Cho hình bình hành ABCD có $B(1;5)$, đường cao $AH: x+2y-2=0$, đường phân giác trong của góc $\widehat{ACB}$ có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải.



Gọi $d: x-y-1=0$.

Phương trình $BC: 2x-y+3=0$,

suy ra tọa độ của điểm C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow C(-4;-5).$$

Gọi B' đối xứng với B qua d, ta tìm được $B'(6;0)$ và $B' \in AC$.

Suy ra phương trình $AC: x-2y-6=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y-6=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(4;-1)$.

Vì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow D(-1;-11)$.

Ví dụ 1.3.10. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD biết $M(2;1), N(4;-2)$; $P(2;0)$; $Q(1;2)$ lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

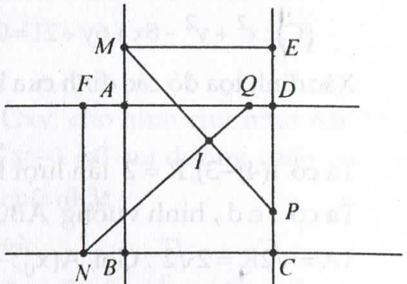
Lời giải

Trước hết ta chứng minh tính chất sau đây:

"Cho hình vuông ABCD, các điểm M,N,P,Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Khi đó $MP = NQ \Leftrightarrow MP \perp NQ$".

Chứng minh: Vẽ $ME \perp CD, E \in CD; NF \perp AD, F \in AD$.

Hai tam giác vuông MEP và NFQ có $NF = ME$.



Do đó $MP = NQ \Leftrightarrow \Delta MEP = \Delta NFQ$

$\Leftrightarrow \widehat{EPM} = \widehat{FQN} \Leftrightarrow \widehat{QIM} = 90^0 \Leftrightarrow MP \perp NQ$

Trở lại bài toán:

Ta có: $\overrightarrow{MP} = (0;-1) \Rightarrow MP = 1$.

Gọi d là đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP

Suy ra phương trình d: $x-4=0$.

Gọi E là giao điểm của d với đường thẳng AD, áp dụng tính chất trên ta suy ra $NE = MP$

Mà $E(4;m)$ nên $NE = MP \Leftrightarrow (m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow m=3, m=1$.

- Với $m=3$, suy ra $E(4;3) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = (3;1)$, suy ra phương trình $AD: x-3y+5=0$

  Phương trình $AB: 3x+y-7=0$, $BC: x-3y-10=0$, $CD: 3x+y-6=0$.

- Với $m=1$, suy ra $E(4;1) \Rightarrow \overrightarrow{QE} = (3;-1)$, suy ra phương trình $AD: x+3y-7=0$

  Phương trình $AB: 3x-y-5=0$, $BC: x+3y+2=0$, $CD: 3x-y-6=0$.

🕮 BÀI TẬP

Bài 1.3.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y=0$, $d_2: 2x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

Hướng dẫn giải

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(t;t)$, A và C đối xứng nhau qua BD và $B, D \in Ox \Rightarrow C(t;-t)$.

Vì $C \in d_2 \Rightarrow 2t-t-1=0 \Leftrightarrow t=1$. Vậy $A(1;1), C(1;-1)$.

Trung điểm của AC là $I(1;0)$. Vì I là tâm của hình vuông nên $\begin{cases} IA=IB=1 \\ ID=IA=1 \end{cases}$.

$$B, D \in Ox \Rightarrow B(b;0), D(d;0) \Rightarrow \begin{cases} |b-1|=1 \\ |d-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0, b=2 \\ d=0, d=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(0;0), D(2;0)$ hoặc $B(2;0), D(0;0)$.

Vậy $A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0)$ hoặc $A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)$.

Bài 1.3.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn

$(C): x^2+y^2-8x+6y+21=0$ và đường thẳng $(d): x+y-1=0$.

Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD ngoại tiếp (C) biết $A\in(C)$

Hướng dẫn giải

Ta có $I(4;-3), R=2$ lần lượt là tâm và bán kính của (C).

Ta có $I\in d$, hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn nên

$IA=\sqrt{2}R=2\sqrt{2}$. Gọi $A(x_0;-x_0+1)\in d$.

$IA=\sqrt{(x_0-4)^2+(-x_0+4)^2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow (x_0-4)^2=4\Rightarrow x_0=2, x_0=6$

$\Rightarrow A(2;-1); C(6;-5)$.

Đường thẳng $d': x-y-7=0$ đi qua tâm I và vuông góc với d.

Gọi $B(x_0;x_0-7)\in d'$.

$\Rightarrow IB=\sqrt{(x_0-4)^2+(x_0-4)^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow x_0=2; x_0=6\Rightarrow B(2;-5), D(6;-1)$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông là $A(2;-1); C(6;-5)$; $B(2;-5), D(6;-1)$ và các hoán vị A cho C, B cho D.

Bài 1.3.3. Biết $A(1;-1), B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông ABCD. Tìm tọa độ hai đỉnh C, D.

Hướng dẫn giải

Gọi $C(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=(2;1);\overrightarrow{BC}=(x-3;y)$.

Tứ giác ABCD là hình vuông suy ra:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\\ AB=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-3)+1.y=0\\ (x-3)^2+y^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-2\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$$

* Với $C_1(4;-2)\Rightarrow D_1(2;-3)$.

* Với $C_2(2;2)\Rightarrow D_2(0;1)$.

Bài 1.3.4. Viết phương trình cạnh AB(AB có hệ số góc dương), AD của hình vuông ABCD biết $A(2;-1)$ và đường chéo $BD: x+2y-5=0$.

Hướng dẫn giải

Vì $AC\perp BD\Rightarrow AC: 2x-y-5=0$

Gọi I là tâm của hình vuông $\Rightarrow I=AC\cap BD\Rightarrow I(3;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-1;-2)\Rightarrow IA=\sqrt{5}\Rightarrow IB=ID=\sqrt{5}$

Vì $B\in BD\Rightarrow B(5-2b;b)\Rightarrow \overrightarrow{IB}=(2-2b;b-1)$

$$\Rightarrow IB^2=5\Leftrightarrow(2b-2)^2+(b-1)^2=5\Leftrightarrow(b-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=2\end{array}\right..$$

Hai giá trị của b tương ứng tọa độ hai điểm B và D

Vì AB có hệ số góc dương nên $B(5;0), D(1;2)$

$\Rightarrow AB: x-3y-5=0, AD: 3x+y-5=0$.

Bài 1.3.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh: $AB: x-3y+5=0$, đường chéo: $BD: x-y-1=0$ và đường chéo AC qua điểm $M(-9;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Ta có tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-3y+5=0\\ x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}\Rightarrow B(4;3)$.

$BC\perp AB\Rightarrow BC: 3(x-4)+(y-3)=0\Leftrightarrow 3x+y-15=0$.

$D\in BD\Rightarrow D(d;d-1)\Rightarrow$ phương trình $AD: 3x+y-4d+1=0$.

$$\Rightarrow AD\cap AB=A:\begin{cases}x-3y+5=0\\ 3x+y-4d+1=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{6d-4}{5};\frac{2d+7}{5}\right)$$

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $\Rightarrow$ I là trung điểm của $BD\Rightarrow I\left(\frac{d+4}{2};\frac{d+2}{2}\right)$

Vì A, I, M thẳng hàng nên ta có:

$\overrightarrow{IA}=k.\overrightarrow{MI}\Rightarrow\frac{7d-28}{d+22}=\frac{-d+4}{d-2}\Leftrightarrow d=-1; d=4$.

* $d=4\Rightarrow D(4;3)\equiv B$ loại

* $d=-1\Rightarrow D(-1;-2), A(-2;1)$ và $I(\frac{3}{2};\frac{1}{2})\Rightarrow C(5;0)$

Vậy $A(-2;1), B(4;3), C(5;0), D(-1;-2)$.

Bài 1.3.6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD biết $M(2;1)$, $N(4;-2)$; $P(2;0)$; $Q(1;2)$ lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CD, AD. Hãy lập phương trình các cạnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường thẳng AB qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;b)$

$(a^2+b^2\neq0)$ suy ra véc tơ pháp tuyến của BC là: $\vec{n}_1(-b;a)$.

Phương trình AB có dạng: $ax+by-2a-b=0$

BC có dạng: $-bx+ay+4b+2a=0$

Do ABCD là hình vuông nên $d(P;AB)=d(Q;BC)$

$$\text{Hay }\frac{|-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3b+4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-2a\\ b=-a\end{array}\right.$$

- $b=-2a$ suy ra phương trình các cạnh cần tìm là:
  $AB: x-2y=0$; $CD: x-2y-2=0$; $BC: 2x+y-6=0$; $AD: 2x+y-4=0$.
- $b=-a$. Khi đó
  $AB: -x+y+1=0$; $BC: -x-y+2=0$
  $AD: -x-y+3=0$; $CD: -x+y+2=0$.

Bài 1.3.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho ba điểm $I(1;1), E(-2;2), F(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết I là tâm của hình vuông, AB đi qua E và CD đi qua F.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng AB có phương trình dạng: $a(x+2)+b(y-2)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+2a-2b=0$ với $a^2+b^2>0$.

Đường thẳng CD có phương trình dạng:
$a(x-2)+b(y+2)=0 \Leftrightarrow ax+by-2a+2b=0$.

Vì $d(I,AB)=d(I,CD) \Rightarrow \dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a=-b$

Suy ra phương trình $AB: x-y+4=0$, $CD: x-y-4=0$.

Phương trình BC và DA có dạng $x+y+c=0$

$d(I,BC)=d(I,AB)=2\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{|x+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Rightarrow c=2, c=-6$.

- $BC: x+y+2=0$, $DA: x+y-6=0$. Suy ra $A(1;5)$, $B(-3;1)$, $C(1;-3)$, $D(5;1)$
- $BC: x+y-6=0$, $DA: x+y+2=0$. Suy ra $A(-3;1)$, $B(1;5)$, $C(5;1)$, $D(1;-3)$.

Bài 1.3.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB: x -2y -1 =0, đường chéo BD: x- 7y +14 = 0 và đường chéo AC đi qua điểm M(2;1). Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật

Hướng dẫn giải

Ta có $BD \cap AB = B(7;3)$, phương trình đường thẳng BC: $2x+y-17=0$

Do $A \in AB \Rightarrow A(2a+1;a)$, $C \in BC \Rightarrow C(c;17-2c)$, $a \neq 3$, $c \neq 7$,

Suy ra $I=\left(\dfrac{2a+c+1}{2};\dfrac{a-2c+17}{2}\right)$ là trung điểm của AC, BD

Mà $I \in BD \Leftrightarrow 3c-a-18=0 \Leftrightarrow a=3c-18 \Rightarrow A(6c-35;3c-18)$

M, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$ cùng phương

Suy ra $c^2-13c+42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=7(\text{loại}) \\ c=6 \end{array}\right.$

Với $c=6$, ta có: $A(1;0)$, $C(6;5)$, $D(0;2)$, $B(7;3)$.

Bài 1.3.9. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết A(1; 0), B(0; 2) và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ đỉnh C và D

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2) \Rightarrow AB=\sqrt{5}$. Phương trình của AB là: $2x+y-2=0$.

$I \in (d): y=x \Rightarrow I(t;t)$.

I là trung điểm của AC và BD nên ta có: $C(2t-1;2t), D(2t;2t-2)$

Mặt khác: $S_{ABCD}=AB.CH=4$ (CH: chiều cao) $\Rightarrow CH=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Ngoài ra: $d(C;AB)=CH \Leftrightarrow \dfrac{|6t-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{4}{3} \Rightarrow C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right), D\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3}\right) \\ t=0 \Rightarrow C(-1;0), D(0;-2) \end{array}\right.$

Vậy tọa độ của C và D là: $C\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right), D\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0), D(0;-2)$.

Bài 1.3.10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm nằm trên cạnh CD sao cho $CN=2ND$. Giả sử $M\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ và $AN: 2x-y-3=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Hướng dẫn giải

Giả sử hình vuông ABCD có cạnh là a. Khi đó, theo đề bài, ta có

$$AN=\sqrt{DA^2+DN^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{9}}=\frac{\sqrt{10}a}{3},$$

$$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}a}{2},$$

$$NM=\sqrt{CN^2+CM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{4a^2}{9}}=\frac{5a}{6}.$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANM, ta có:

$$\cos\widehat{NAM}=\frac{AN^2+AM^2-NM^2}{2\cdot AN\cdot AM}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó, phương trình đường thẳng AM qua M và tạo với AN một góc thỏa $\cos\widehat{NAM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử đường thẳng AM có pháp vector là $\vec{n}=(a,\ b)\ (a^2+b^2\neq 0)$. Khi đó, ta tính được $\cos\widehat{NAM}=\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}}$.

Từ đây, do $\cos\widehat{NAM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên ta có

$$\sqrt{2}|2a-b|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0\Leftrightarrow a=3b\vee b=-3a.$$

- Với $a=3b$: Chọn $b=1,\ a=3$, ta có AM:

$$3\cdot\left(x-\frac{11}{2}\right)+1\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)=0,\ \text{tức } 3x+y-17=0.$$

Từ đây dễ dàng tìm được $A(4,\ 5)$.

- Với $b=-3a$: Chọn $a=1,\ b=-3$, ta có $AM:1\cdot\left(x-\dfrac{11}{2}\right)-3\cdot\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0$, tức $x-3y-4=0$. Với kết quả này, ta tìm được $A(1,\ -1)$.

Vậy có tất cả hai điểm A thỏa mãn yêu cầu đề bài là : $A(4,\ 5)$ và $A(1,\ -1)$.

Bài 1.3.11. Cho hình thang vuông ABCD, vuông tại A và D. Phương trình $AD:x-y\sqrt{2}=0$. Trung điểm M của BC có tọa độ $M(1,0)$. Biết $BC=CD=2AB$.. Tìm tọa độ của điểm A.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của M lên AD ta có $H\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Nếu cho $AB=x$ ta có $BC=CD=2x$ dễ dàng ta thấy

$$MH=\frac{3x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Suy ra $AD=BE=\sqrt{AB^2-CE^2}=\sqrt{3}x=\dfrac{2}{3}$

Gọi $A(\sqrt{2}t;t)$, suy ra $\overrightarrow{HA}=\left(\sqrt{2}t-\dfrac{2}{3};t-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Do $AD=\dfrac{2}{3}$ nên $AH=\dfrac{1}{3}$ hay:

$$\left(\frac{2}{3}-\sqrt{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-t\right)^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 3t^2-2\sqrt{2}t+\frac{5}{9}=0\Leftrightarrow t=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{9}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $A\left(\dfrac{6\pm\sqrt{6}}{9};\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{9}\right)$.

Bài 1.3.12. Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $M(4;5)$, $N(6;5)$, $P(5;2)$, $Q(2;1)$. Viết phương trình cạnh AB của hình chữ nhật ABCD biết các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua M, N, P, Q và diện tích hình chữ nhật bằng 16.

Hướng dẫn giải

Phương trình AB có dạng: $a(x-4)+b(y-5)=0$ với $a^2+b^2>0$

Phương trình $BC:b(x-6)-a(y-5)=0$.

Diện tích của hình chữ nhật: $S=d(P,AB).d(Q,BC)=\dfrac{4|(a-3b)(a-b)|}{a^2+b^2}$

Mà $S=16$ nên ta có: $\dfrac{4|(a-3b)(a-b)|}{a^2+b^2}=16\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1,b=1\\ a=-\dfrac{1}{3},b=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình AB là: $x-y+1=0$ hoặc $x-3y+11=0$.

Bài 1.3.13. Trong mặt phẳng Oxy cho hình thoi ABCD, phương trình hai cạnh AB, AD lần lượt có phương trình $x+2y-2=0$ và $2x+y+1=0$. Điểm $M(1;2)$ nằm trên cạnh BD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Hướng dẫn giải

Tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x+2y-2=0\\2x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{4}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow A\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Gọi a là cạnh của hình thoi, ta suy ra:

$$S_{ABCD}=2S_{ABD}=2\left(S_{AMB}+S_{AMD}\right)=a\left[d(M,AB)+d(M,AD)\right]=\frac{8a}{\sqrt{5}}$$

Mặt khác, $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=a^2\sin\alpha$

Mà $\cos\alpha=|\cos(AB,AD)|=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{3a^2}{5}$.

Do đó ta có: $\dfrac{3a^2}{5}=\dfrac{8a}{\sqrt{5}}\Rightarrow a=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$.

$B(2-2b;b)$, $D(d;-2d-1)$. Từ $AB=AD=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ ta tìm được $b=-1,d=-4$

Vậy $B(4;-1)$, $D(-4;7)$ và $C\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{13}{3}\right)$.

§ 4. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG TRÒN VÀ CÔNIC

1. Nhóm các bài toán liên quan đến đường tròn.

Khi giải các bài toán về đường tròn chúng ta cần lưu ý:

1) Vị trí tương đối giữa hai đường tròn

Cho hai đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2. Khi đó, ta có các kết quả sau:

- (C_1) và (C_2) không có điểm chung khi và chỉ khi $I_1I_2 > R_1 + R_2$ hoặc $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$.
- (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $I_1I_2 = R_1 + R_2$.
- (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong khi và chỉ khi $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$.
- (C_1) và (C_2) cắt nhau khi và chỉ khi $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$.

2) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ và đặt $d = IH = d(I,\Delta)$. Khi đó:

- (C) và Δ không có điểm chung khi và chỉ khi $d > R$.
- (C) và Δ có đúng một điểm chung khi và chỉ khi $d = R$. Lúc này Δ gọi là tiếp tuyến của (C), H là tiếp điểm.

Chú ý: Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (C) luôn vẽ được hai tiếp tuyến MA, MB (A,B là các tiếp điểm) đến (C). Khi đó $MA = MB$ và IM là phân giác của góc $\widehat{AMB}$.

- (C) và Δ có điểm A,B chung khi và chỉ khi $d < R$. Khi đó H là trung điểm của AB và ta có công thức $R^2 = d^2 + \dfrac{AB^2}{4}$.

Ví dụ 1.4.1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2), B(-2;-2), C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

Lời giải.

Ta có $M(-1;0), N(1;-2), \overrightarrow{AC} = (4;-4)$. Gọi $H(x,y)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ H \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) - 4(y+2) = 0 \\ 4x + 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1;1)$$

Giả sử phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Ba điểm M,N,H thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a - 2b + c = -5 \\ a + b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

Ví dụ 1.4.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho cho hai điểm A(2;0) và B(6;4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Lời giải

Gọi I(a;b) và R lần lượt là tâm của và bán kính của (C).

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại A nên $a = 2$ và $R = |b|$

Mặt khác: $IB = 5 \Leftrightarrow 4^2 + (b-4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow b = 1, b = 7$

Với $b = 1$ thì phương trình đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Với $b = 7$ thì phương trình đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$.

Ví dụ 1.4.3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(6;6) và hai đường thẳng $\Delta_1: 4x - 3y - 24 = 0$, $\Delta_2: 4x + 3y + 8 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Lời giải.

Gọi I(a;b) là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

Vì (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên ta có $d(I,\Delta_1) = d(I,\Delta_2)$

Hay $\dfrac{|4a - 3b - 24|}{5} = \dfrac{|4a + 3b + 8|}{5} = R \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a - 3b - 24 = 4a + 3b + 8 \\ 4a - 3b - 24 = -4a - 3b - 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -\dfrac{16}{3} \\ a = 2 \end{array}\right.$

- $a = 2$, phương trình $(C): (x-2)^2 + (y-b)^2 = \dfrac{(3b+16)^2}{25}$.

Do $M \in (C)$ nên $(6-2)^2 + (6-b)^2 = \dfrac{(3b+16)^2}{25} \Leftrightarrow b = 3, b = \dfrac{87}{4}$

Suy ra phương trình $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

hoặc $(C): (x-2)^2 + (y - \dfrac{87}{4})^2 = \dfrac{4225}{16}$.

- $b = -\frac{16}{3}$, phương trình của (C): $(x-a)^2 + \left(y + \frac{16}{3}\right)^2 = \frac{(4a-8)^2}{25}$

Do $M \in (C)$ nên $(6-a)^2 + \left(6 + \frac{16}{3}\right)^2 = \frac{(4a-8)^2}{25}$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ1.4. 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) có tâm M trên d, bán kính bằng 2 lần bán kính đường tròn (C) và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$.

Gọi I' là tâm và R' là bán kính của đường tròn (C′) ta có $R' = 2R = 2$ và $I' \in d \Rightarrow I'(a; a+3)$

Vì (C) và (C′) tiếp xúc ngoài với nhau nên $II' = R + R' = 3$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (a+2)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = -2$.

- $a = 1 \Rightarrow I'(1;4) \Rightarrow (C'): (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$
- $a = -2 \Rightarrow I'(-2;1) \Rightarrow (C'): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Ví dụ 1.4.5. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$ và đường tròn $(C_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8$. Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, M(0; 6).

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1 = 2\sqrt{5}$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;2)$, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.

Do $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = R_1 - R_1 < I_1I_2 = \sqrt{5} < R_1 + R_2 = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ nên (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \\ 2x + \frac{15}{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + \frac{15}{2} \\ 5x^2 + 24x + \frac{93}{4} = 0 \ (*) \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*), suy ra $A\left(x_1; 2x_1 + \frac{15}{2}\right), B\left(x_2; 2x_2 + \frac{15}{2}\right)$.

Suy ra $AB^2 = 5(x_1 - x_2)^2 = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = \frac{111}{5}$

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{12}{5} \\ y_M = x_1 + x_2 + \frac{15}{2} = \frac{27}{10} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{12}{5}; \frac{27}{10}\right)$.

Phương trình đường thẳng AB: $4x - 2y + 15 = 0$ nên

Phương trình đường trung trực Δ của đoạn AB: $x + 2y - 3 = 0$.

Gọi I là tâm của đường tròn (C), suy ra $I \in \Delta \Rightarrow I(2a+3; -a)$

Mặt khác:

$$d^2(I, AB) + \frac{AB^2}{4} = IM^2 \Leftrightarrow \frac{(10a+27)^2}{20} + \frac{111}{20} = (2a+3)^2 + (a+6)^2 \Leftrightarrow a = 1$$

Suy ra $I(5;-1)$, bán kính $R = IM = 5\sqrt{2}$.

Vậy phương trình của (C): $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 74$.

Chú ý: Ngoài cách giải trên, ta có thể sử dụng chùm đường tròn để giải. Cụ thể:

Vì (C) đi qua các giao điểm của (C_1) và (C_2) nên phương trình của (C) có dạng: $m(x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18) + n(x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) = 0$.

Do (C) đi qua M(0;6) nên ta có: $2m + 3n = 0$, ta chọn $m = 3, n = -2$

Khi đó phương trình (C): $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 48 = 0$.

Ví dụ 1.4.6. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với (C).

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(6;2)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $(C'): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R'^2$ thì (C') có tâm $I'(a;b)$, bán kính R'.

Vì (C') tiếp xúc với Ox, Oy

nên suy ra $d(I', Ox) = d(I', Oy) \Leftrightarrow |a| = |b| = R' \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

Hơn nữa (C') tiếp xúc với Ox, Oy và tiếp xúc ngoài với (C) nên (C') nằm bên phải trục Oy, do đó $a > 0$.

TH1: $a=b=R \Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

Vì (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên:

$$II'=R+R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-6)^2+(a-2)^2}=2+a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=18 \end{array}\right.$$

Trường hợp này có 2 đường tròn là :

$(C_1'):(x-2)^2+(y-2)^2=4$ và $(C_2'):(x-18)^2+(y-18)^2=18^2$.

TH2: $a=-b=R \Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

Tương tự như trường hợp 1, ta có :

$$II'=R+R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-6)^2+(a+2)^2}=2+a \Leftrightarrow a=6$$

Vậy trường hợp này có 1 đường tròn là $(C_3'):(x-6)^2+(y+6)^2=36$.

Tóm lại , có 3 đường tròn thỏa cần tìm là :

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-18)^2+(y-18)^2=18^2$ và $(x-6)^2+(y+6)^2=36$.

Ví dụ 1.4.7. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ có tâm I và điểm $M(5;-3)$. Chứng minh rằng từ M, ta có thể vẽ đến (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A,B là tiếp điểm). Tính diện tích của tứ giác MAIB .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Vì $MI=\sqrt{41}>R$ nên M nằm ngoài đường tròn (C), do đó từ M ta luôn vẽ được hai tiếp tuyến tới đường tròn (C).

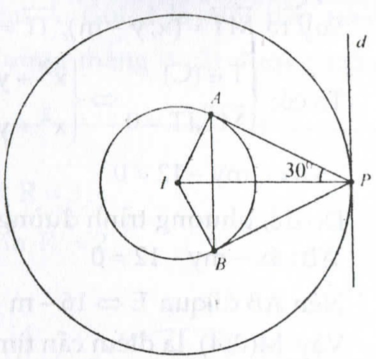
Ta có $S_{MAIB}=2S_{\Delta MAI}=IA.MA=R.\sqrt{MI^2-R^2}=3.\sqrt{41-9}=12\sqrt{2}$ (đvdt).

Ví dụ 1.4.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d:3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm và bán kính lần lượt là: $I(1;-2); R=3$.

Do tam giác PAB đều nên



$\widehat{API}=30^0 \Rightarrow IP=2IA=2R=6$.

Suy ra P thuộc vào đường tròn (C') có tâm I và bán kính $R'=6$.

Mà $P\in d$ nên P chính là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C')

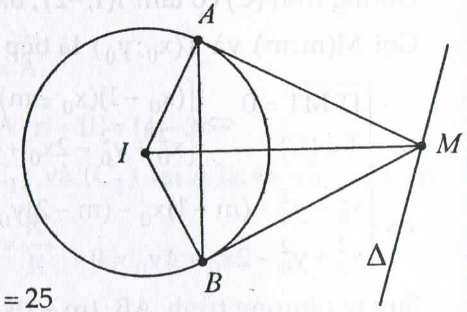
Suy ra trên d có duy nhất điểm P thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C') tại P hay là $d(I,d)=6 \Leftrightarrow m=19, m=-41$.

Ví dụ 1.4.9. Cho đường thẳng Δ: $x+y+2=0$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm và M thuộc đường thẳng Δ. Qua M kẻ tiếp tuyến MA,MB. Tìm M sao cho diện tích tứ giác MAIB bằng 10.

(Đề thi ĐH Khối A – 2011).

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5} \Rightarrow AI=\sqrt{5}$.



Mặt khác $S_{\Delta MAI}=\frac{1}{2}S_{AIBM}=5$

$\Rightarrow \frac{1}{2}MA.IA=5 \Rightarrow MA=2\sqrt{5}$

Suy ra $IM^2=IA^2+AM^2=25$.

Mà $M\in\Delta$ nên $M(m;-m-2)$,

suy ra $IM^2=25 \Leftrightarrow (m-2)^2+(m+3)^2=25$

$\Leftrightarrow m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=-3, m=2$.

Vậy $M(2;-4)$ và $M(-3;1)$ là hai điểm cần tìm.

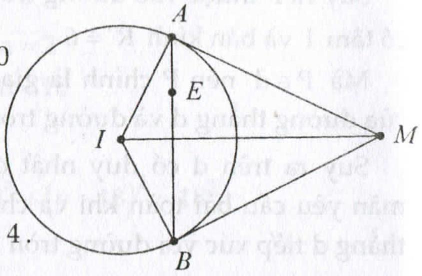
Ví dụ 1.4.10. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-4)^2+y^2=4$ và điểm $E(4;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA,MB đến đường tròn (C) với A,B là hai tiếp điểm sao cho đường thẳng AB đi qua điểm E.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=2$.

Gọi $M(0;m)$, giả sử $T(x;y)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ M tới (C).

Suy ra $\overrightarrow{MT}=(x;y-m)$, $\overrightarrow{IT}=(x-4;y)$.



Ta có: $\begin{cases} T\in(C) \\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-8x+12=0 \\ x^2+y^2-4x-my=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x-my-12=0$

Do đó, phương trình đường thẳng $AB: 4x-my-12=0$

Nên AB đi qua $E \Leftrightarrow 16-m-12=0 \Leftrightarrow m=4$.

Vậy $M(0;4)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 1.4.11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy,cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y=0$ và đường thẳng $d: x-y=0$. Tìm tọa độ các điểm M trên đường thẳng d, biết từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA,MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) và đường thẳng AB tạo với d một góc φ với $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Gọi $M(m;m)$ và $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm vẽ từ M đến (C). Khi đó, ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{IT}.\overrightarrow{MT}=0 \\ T\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)(x_0-m)+(y_0+2)(y_0-m)=0 \\ x_0^2+y_0^2-2x_0+4y_0=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2-(m+1)x_0-(m-2)y_0-m=0 \\ x_0^2+y_0^2-2x_0+4y_0=0 \end{cases} \Rightarrow (m-1)x_0+(m+2)y_0+m=0.$$

Suy ra phương trình $AB: (m-1)x+(m+2)y+m=0$.

Mặt khác AB tạo với d một góc φ với $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$ nên ta có:

$$\frac{|m-1-m-2|}{\sqrt{2}\sqrt{(m-1)^2+(m+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sqrt{5}=\sqrt{2m^2+2m+5}$$

$\Leftrightarrow m^2+m=0 \Leftrightarrow m=0, m=-1$

Thử lại ta thấy cả hai trường hợp này ta đều $IM=R$ hay $M\in(C)$.

Vậy không có điểm M thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1.4.12. Cho hai đường tròn

$(C_1): (x-3)^2+(y-2)^2=9$ và $(C_2): (x-7)^2+(y+1)^2=4$.

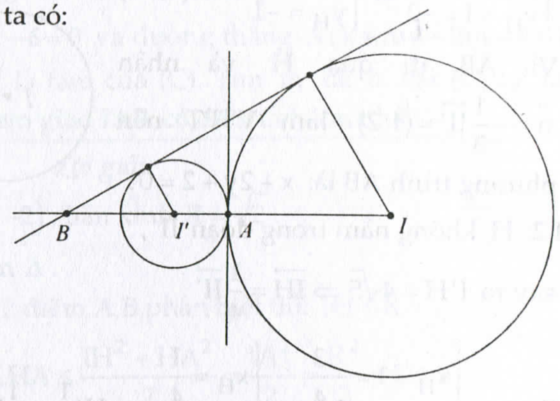
hứng minh (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A. Gọi d là một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) không đi qua A, đường thẳng d cắt đường thẳng nối hai tâm tại B. Tìm tọa độ điểm B.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I(3;2)$ và bán kính $R=3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I'(7;-1)$ và bán kính $R'=2$.

Gọi $A(x;y)$. Theo giả thiết ta có:



$$\frac{AI'}{AI}=\frac{R'}{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{I'A}=-\frac{R'}{R}\overrightarrow{IA}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7=-\frac{2}{3}(x-3) \\ y+1=-\frac{2}{3}(y-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{27}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow A=\left(\frac{27}{5};\frac{1}{5}\right).$$

Tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A.

Véc tơ pháp tuyến của tiếp tuyến tại $A: \vec{n}=\overrightarrow{II'}=(4;-3)$

Phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) tại A là: $4x-3y-21=0$.

Gọi $B(x_0;y_0)$, theo giả thiết ta có $\frac{BI'}{BI}=\frac{R'}{R}$

Suy ra $\overrightarrow{IB'}=\frac{R'}{R}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-7=\frac{2}{3}(x_0-3) \\ y_0+1=\frac{2}{3}(y_0-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=15 \\ y_0=-7 \end{cases} \Rightarrow B(15;-7)$.

Ví dụ 1.4.13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=10$. Đường tròn (C') tâm $I'(-2;-5)$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{5}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Độ dài $II'=3\sqrt{5}$

Gọi H là giao điểm của II' và AB

suy ra H là trung điểm AB nên $AH=\sqrt{5}$

Do $II' \perp AB$ nên ta có: $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5}$

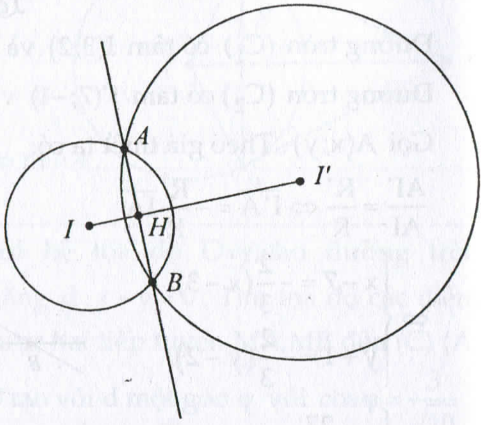
TH 1: H thuộc đoạn II' $\Rightarrow I'H = 2\sqrt{5} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{II'}$

Mà $\overrightarrow{IH} = \left(x_H - 1; y_H - 1\right)$, $\overrightarrow{II'} = (-3;-6)$

nên ta có:

$$\begin{cases} x_H - 1 = -1 \\ y_H - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -1 \end{cases} \Rightarrow H(0;-1)$$

Vì AB đi qua H và nhận $\vec{n} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{II'} = (1;2)$ làm VTPT nên phương trình AB là: $x + 2y + 2 = 0$.



TH 2: H không nằm trong đoạn II',

suy ra $I'H = 4\sqrt{5} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{II'}$

Suy ra $\begin{cases} x_H - 1 = -\frac{3}{4} \\ y_H - 1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1}{4} \\ y_H = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2})$.

Phương trình $AB: x + 2y + \frac{3}{4} = 0$.

Ví dụ 1.4.14. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ có tâm I. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M(−6;3) và cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích bằng $2\sqrt{2}$ và $AB > 2$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm I(1;−1), bán kính R = 3.

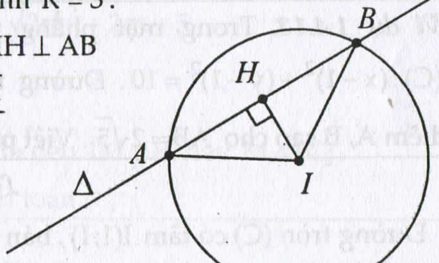
Gọi H là trung điểm của AB. Suy ra $IH \perp AB$

$\Rightarrow S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}HI.AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{2}}{HI}$

Mặt khác: $AH^2 + HI^2 = IA^2$

$\Rightarrow \frac{AB^2}{4} + HI^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{8}{HI^2} + HI^2 = 9$

$\Leftrightarrow HI^4 - 9HI^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} HI = 1 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \\ HI = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$



Vì Δ đi qua M nên phương trình Δ có dạng: $ax + by + 6a - 3b = 0$

Mà ta có: $HI = 1 \Rightarrow d(I,\Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|7a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

$$\Leftrightarrow 15b^2 - 56ab + 48a^2 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}a, b = \frac{12}{5}a$$

Vậy $\Delta: 3x + 4y + 6 = 0$ hoặc $\Delta: 5x + 12y - 6 = 0$ là đường thẳng cần lập.

Ví dụ 1.4.15. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm của (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I\left(-2;-2\right)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu của I trên Δ.

Để Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B phân biệt thì: $IH < R$

Khi đó $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IH.AB = IH.HA \le \frac{IH^2 + HA^2}{2} = \frac{IA^2}{2} = \frac{R^2}{2} = 1$

Suy ra $\max S_{\Delta IAB} = 1$ khi $IH = HA = 1 < R$

$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |1-4m| = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 1 - 8m + 16m^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là: $m = 0$ và $m = \frac{8}{15}$.

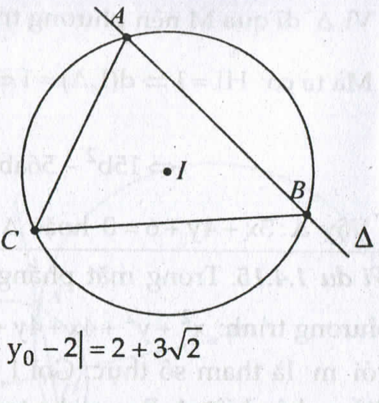
Ví dụ 1.4.16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ và đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Chứng minh rằng Δ cắt (T) tại hai điểm phân biệt A, B và tìm tọa độ điểm C trên (T) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $(3 + \sqrt{2})\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đường tròn (T) có tâm I(1;−1), bán kính R = 3

Ta có $d(I,\Delta) = \sqrt{2} < R \Rightarrow \Delta$ và (T) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

Và $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I,\Delta)} = 2\sqrt{7}$.



Giả sử $C(x_0;y_0)\in(T)$

$\Rightarrow (x_0-1)^2+(y_0+1)^2=9 \quad (1)$

Diện tích tam giác ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}d(C,AB).AB=\sqrt{7}.d(C,\Delta)$$

Do đó:

$$S_{\Delta ABC}=(3+\sqrt{2})\sqrt{7}\Leftrightarrow d(C,\Delta)=3+\sqrt{2}$$

Mà $d(C,\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2}}|x_0+y_0-2|=\sqrt{2}+3\Leftrightarrow|x_0+y_0-2|=2+3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x_0+y_0-2=\pm(2+3\sqrt{2}).$$

- $x_0+y_0-2=2+3\sqrt{2}\Rightarrow x_0=4+3\sqrt{2}-y_0$ thay vào (1), ta có được:

  $(y_0-3\sqrt{2}-3)^2+(y_0+1)^2=9$ vô nghiệm.

- $x_0+y_0-2=-2-3\sqrt{2}\Rightarrow x_0=-3\sqrt{2}-y_0$ thay vào (1) ta có

  $(y_0+3\sqrt{2}-1)^2+(y_0+1)^2=9\Leftrightarrow y_0=-1-\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow x_0=1-\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy $C(1-\frac{3}{\sqrt{2}};-1-\frac{3}{\sqrt{2}})$.

Ví dụ 1.4.17. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ và đường thẳng $d:2x-y-1=0$. Lập phương trình đường tròn (C′) có tâm nằm trên d và hoành độ lớn hơn 2, đồng thời (C′) cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho dây cung AB có độ dài bằng $4\sqrt{5}$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x-y+15=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=5$.

Gọi I′ là tâm của đường tròn (C′), $I'\in d$ nên suy ra $I'(m;2m-1), m>2$ và R′ là bán kính. Ta có: $R'=d(I',\Delta)=\frac{|m+16|}{\sqrt{10}}$.

Gọi H là giao điểm của II′ và AB, suy ra H là trung điểm của AB nên $AH=2\sqrt{5}$.

Vì $IH+I'H=II'$ nên ta có:

$\sqrt{R^2-AH^2}+\sqrt{R'^2-AH^2}=II'$ hoặc $\left|\sqrt{R^2-AH^2}-\sqrt{R'^2-AH^2}\right|=II'$

TH1: $\sqrt{R^2-AH^2}+\sqrt{R'^2-AH^2}=II'$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5}+\sqrt{\frac{(m+16)^2}{10}-20}=\sqrt{(m-1)^2+(2m-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{2}+\sqrt{m^2+32m+56}=5\sqrt{2}|m-1|$$

$$\Leftrightarrow m^2+32m+56=50\left(m^2-2m+2-2|m-1|\right)$$

$$\Leftrightarrow 49m^2-132m+44=100|m-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}49m^2-232m+144=0\\49m^2-32m-56=0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=4\ (\text{do } m>2)$$

TH2: $\left|\sqrt{R^2-AH^2}-\sqrt{R'^2-AH^2}\right|=II'\Leftrightarrow\left|5\sqrt{2}-\sqrt{m^2+32m+56}\right|=5\sqrt{2}|m-1|$

$$\Leftrightarrow 50-10\sqrt{2(m^2+32m+56)}+m^2+32m+56=50m^2-100m+50$$

$$\Leftrightarrow 49m^2-132m-56+10\sqrt{2(m^2+32m+56)}=0 \quad (1)$$

Do $m>2$ nên $49m^2-132m-56+10\sqrt{2(m^2+32m+56)}>32$ nên (1) vô nghiệm

Vậy phương trình $(C'):(x-4)^2+(y-7)^2=40$.

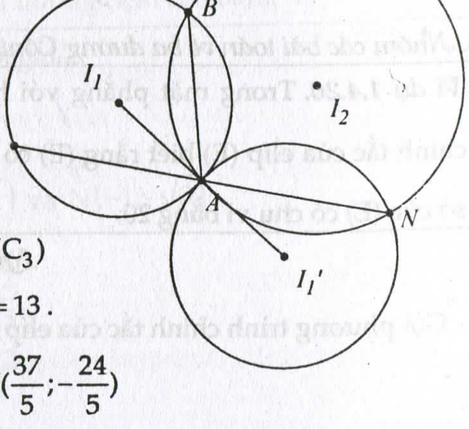
Ví dụ 1.4.18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=13$ và $(C_2):(x-6)^2+y^2=25$. Gọi A là giao điểm của (C₁) và (C₂) với $y_A<0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (C_1), (C_2) theo 2 dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Xét hệ: $\begin{cases}x^2+y^2=13\\(x-6)^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\pm3\end{cases}\Rightarrow A(2;-3),B(2;3)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần lập.

- $\Delta\equiv AB$ thỏa yêu cầu bài toán
- $\Delta\neq AB$ giả sử Δ cắt hai đường tròn (C₁), (C₂) lần lượt tại M, N



Phép đối xứng tâm A biến M thành N và (C_1) thành (C_3)

Vì $M\in(C_1)\Rightarrow N\in(C_3)\Rightarrow N\in(C_2)\cap(C_3)$

Phương trình $(C_3):(x-4)^2+(y+6)^2=13$.

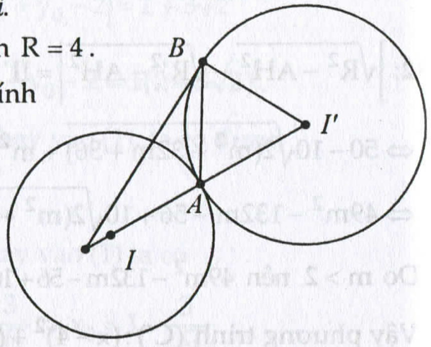
Suy ra $N:\begin{cases}(x-4)^2+(y+6)^2=13\\(x-6)^2+y^2=25\end{cases}\Rightarrow N(\frac{37}{5};-\frac{24}{5})$

Suy ra $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{27}{5}; -\frac{9}{5}\right) \Rightarrow \Delta$ có $\vec{n} = (1;3)$ là VTPT

Phương trình $\Delta : x + 3y + 7 = 0$.

Ví dụ 1.4.19. Cho đường tròn (C) có phương trình là $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ và đường thẳng d có phương trình là $3x + 4y - 1 = 0$. Gọi (C′) là đường tròn có bán kính bằng 5 tiếp xúc với ngoài với (C) tại A và tiếp xúc với d tại B. Tính đoạn AB.

Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = 4$.

Gọi $I'(a;b), R'$ lần lượt là tâm và bán kính của (C′), suy ra $R' = 5$ và $II' = R + R' = 9$

Áp dụng định lí cô sin cho tam giác AI'B ta có:

$$AB^2 = I'A^2 + I'B^2 - 2.I'A.I'B.\cos\widehat{AI'B}$$
$$= 50(1 - \cos\widehat{AI'B})$$

Mà $\cos\widehat{AI'B} = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta}, \overrightarrow{I'I}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{I'I}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{I'I}\right|} = \frac{|3(a-2)+4(b+3)|}{5.9} = \frac{|3a+4b+6|}{45}$

Mặt khác: $d(I', \Delta) = 5 \Rightarrow \frac{|3a+4b-1|}{5} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a+4b=26 \\ 3a+4b=-24 \end{array}\right.$.

- $3a + 4b = 26 \Rightarrow \cos\widehat{AI'B} = \frac{32}{45} \Rightarrow AB^2 = 50\left(1 - \frac{32}{45}\right) = \frac{130}{9} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{130}}{3}$
- $3a + 4b = -24 \Rightarrow \cos\widehat{AI'B} = \frac{2}{5} \Rightarrow AB^2 = 50\left(1 - \frac{2}{5}\right) = 30 \Rightarrow AB = \sqrt{30}$.

4. Nhóm các bài toán về ba đường Cônic.

Ví dụ 1.4.20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elíp (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 2(2a+2b) = 20 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$.

Giải hệ trên, ta tìm được: $a = 3$ và $b = 2$.

Phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ví dụ 1.4.21. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của (E).

Lời giải.

Giả sử hypebol (H) có dạng : $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$

Vì (H) có hai tiệm cận $y = \pm 2x$ nên ta có: $\frac{n}{m} = 2 \Rightarrow n = 2m$.

Đối với elip ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 12 - 2 = 10$.

Theo giả thiết thì tiêu điểm của Hypebol cũng là của elip nên:

$$c^2 = m^2 + n^2 \Leftrightarrow 10 = m^2 + (2m)^2 = 5m^2 \Leftrightarrow m^2 = 2, n^2 = 8$$

Phương trình hypebol (H) là: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Ví dụ 1.4.22. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H), biết:

1) (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1; -\sqrt{3}\right)$,

2) (H) đi qua $E(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0.

Lời giải.

Giả sử (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Do (H) đi qua hai điểm $M\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ và $N\left(-1; -\sqrt{3}\right)$

nên ta có hệ: $\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình (H) là : $\frac{x^2}{\frac{2}{5}} - \frac{y^2}{2} = 1$

2) Vì $E(-2;1) \in (H)$ nên ta có $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ (1)

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$ và $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$ hay $bx + ay = 0$.

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 nên $\cos 60^0 = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2}$

Hay $\frac{1}{2} = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2|b^2 - a^2| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{array}\right.$

- Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (1) được $a^2 = \frac{11}{3}$, $b^2 = 11$

  Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$

- Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (1) được $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{3}$

  Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Vậy có có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là:

$$\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1 \text{ và } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Ví dụ 1.4.23. Viết phương trình chính tắc của Parabol (P), biết:

1) Khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta : x + y - 12 = 0$ bằng $2\sqrt{2}$.

2) (P) cắt đường thẳng $\Delta : 3x - y = 0$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

1) Ta có tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

Khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{2}$ nên:

$$d(F;\Delta) = \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ suy ra } p = 16 \text{ hoặc } p = 32.$$

Vậy phương trình của (P): $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$

2) Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tọa độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại.

Vì $A \in \Delta \Rightarrow A(a;3a)$.

Mặt khác $AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

Nếu $a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3.\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p\frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P) : y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$

Nếu $a = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ (loại).

Ví dụ 1.4.24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E). Biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải.

Gọi $A(x_0;y_0)$, do A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B(x_0;-y_0)$.

Suy ra $AB^2 = 4y_0^2$; $AC^2 = (2 - x_0)^2 + y_0^2$.

Vì $A \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{4 - x_0^2}{4}$ (1)

ΔABC đều nên $AB = AC \Leftrightarrow 4y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + y_0^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{2}{7} \end{array}\right.$.

- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow A \equiv C$ loại.
- Với $x_0 = \frac{2}{7}$ thay vào (1) ta được $y_0^2 = \frac{48}{49} \Leftrightarrow x_0 = \mp\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vậy $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Ví dụ 1.4.25. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ có tiêu điểm F_1 và F_2. Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

1) Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

2) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3

3) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Gọi $M(x_M;y_M)\in(E)\Rightarrow\frac{x_M^2}{9}-\frac{y_M^2}{6}=1$ (1)

1) Từ phương trình (H) có $a^2=9, b^2=6$ nên $a=3,\ b=\sqrt{6}, c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}$

Suy ra $F_1(-\sqrt{15};0);F_2(\sqrt{15};0)$

Ta có: $\overrightarrow{F_1M}=(x_M+\sqrt{15};y_M);\overrightarrow{F_2M}=(x_M-\sqrt{15};y_M)$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow(x_M+\sqrt{15})(x_M-\sqrt{15})+y_M^2=0\Leftrightarrow y_M^2=15-x_M^2$ thế vào (1) ta được $\frac{{x_M}^2}{9}-\frac{15-{x_M}^2}{6}=1\Leftrightarrow x_M=\pm\sqrt{\frac{63}{5}}$ suy ra $y_M=\pm\sqrt{\frac{12}{5}}$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là

$M_1\left(\sqrt{\frac{63}{5}};\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{\frac{63}{5}};\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$, $M_3\left(\sqrt{\frac{63}{5}};-\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$ và $M_4\left(-\sqrt{\frac{63}{5}};-\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

2) Ta có $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x_M\right|$ nên $3=\left|3+\frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=0(\text{loại})\\x_M=\frac{-18}{\sqrt{15}}\Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{210}}{5}\end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm: $M_1\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};-\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$

3) Phương trình hai tiệm cận là : $d_1:y=\frac{\sqrt{6}}{3}x;\ d_2:y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ suy ra

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M-y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}+\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M+y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}=\frac{24\sqrt{2}}{5}\Leftrightarrow\left|\sqrt{6}x_M-3y_M\right|+\left|\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}\quad(2)$$

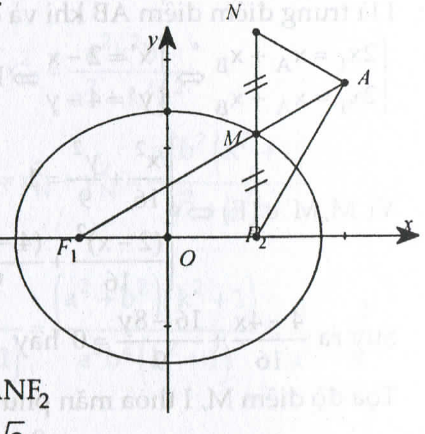
Mặt khác $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{6}x_M-3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M+3y_M\right)=54>0$ suy ra

$(2)\Leftrightarrow\left|\sqrt{6}x_M-3y_M+\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5}\Leftrightarrow x_M=\pm\frac{12}{\sqrt{5}}\Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{330}}{5}$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_3\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và $M_4\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 1.4.26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Lời giải.



Ta có: $F_1(-1;0),\ F_2(1;0)$.

Đường thẳng $AF_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{\sqrt{3}}$

Từ đó ta tìm được

$M\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow AM=MF_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Do N đối xứng với F_2 qua M nên ta có

$MN=MF_2\Rightarrow MA=MF_2=MN$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 có tâm là điểm M, bán kính $R=MA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

nên nó có phương trình: $(x-1)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$.

Ví dụ 1.4.27. Cho elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $I(1;2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải:

Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua I nhận $\vec{u}(a;b)$ làm vecto chỉ phương có dạng:

$\begin{cases} x = 1+at \\ y = 2+bt \end{cases}$, với $a^2+b^2 \neq 0$.

Do A, B $\in \Delta$ suy ra $A = (1+at_1; 2+bt_1)$, $B = (1+at_2; 2+bt_2)$.

I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1+t_2)=0 \\ b(t_1+t_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1+t_2=0 \quad (1)$$

A, B $\in (E)$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1+at)^2}{16}+\frac{(2+bt)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \left(9a^2+16b^2\right)t^2+2(9a+32b)t-139=0$$

Theo định lý Viet ta có $t_1+t_2=0 \Leftrightarrow 9a+32b=0$

Ta có thể chọn $b=-9$ và $a=32$.

Vậy đường thẳng d có phương trình : $9x+32y-73=0$.

Cách 2: Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x;y) \in (E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B(x';y')$.

I là trung điểm điểm AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2-x \\ y' = 4-y \end{cases} \Rightarrow M'(2-x;4-y)$$

Vì $M, M' \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ \dfrac{(2-x)^2}{16}+\dfrac{(4-y)^2}{9}=1 \end{cases}$

Suy ra $\frac{4-4x}{16}+\frac{16-8y}{9}=0$ hay $9x+32y-73=0$ (*)

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình (*) nên đường thẳng cần tìm là:

$$9x+32y-73=0.$$

Ví dụ 1.4.28. Trong mặt phẳng Oxy cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và hai điểm M, N thuộc (E) sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh rằng :

1) $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,

2) Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

1) • Dễ thấy một trong hai điểm trùng với bốn đỉnh của (E) thì đẳng thức hiển nhiên đúng

- Nếu cả hai điểm không trùng với các đỉnh của (E):

Gọi $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ và k $(k \neq 0)$ là hệ số góc của đường thẳng OM thì hệ số góc của ON là $-\frac{1}{k}$ (vì OM vuông góc với ON).

Do M, N $\in (E)$ nên $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$ (1), $\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{y_N^2}{b^2}=1$ (2)

Đường thẳng OM có phương trình là $y=kx$ suy ra $y_M=kx_M$ (3)

Đường thẳng ON có phương trình là $y=-\frac{1}{k}x$ suy ra $y_N=-\frac{1}{k}x_N$ (4)

Thay (3) vào (1) suy ra: $\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{k^2x_M^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x_M^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1 \Leftrightarrow x_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$

$\Rightarrow y_M^2=k^2x_M^2=\frac{k^2a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$. Do đó $OM^2=x_M^2+y_M^2=\frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{a^2k^2+b^2}$

Tương tự thay (4) vào (2) suy ra:

$$\frac{x_N^2}{a^2}+\frac{\frac{1}{k^2}x_N^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow x_N^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{k^2b^2}\right)=1 \Leftrightarrow x_N^2=\frac{a^2k^2b^2}{a^2+k^2b^2}$$

$\Rightarrow y_N^2=\frac{1}{k^2}x_N^2=\frac{a^2b^2}{a^2+k^2b^2}$. Do đó $ON^2=x_N^2+y_N^2=\frac{a^2b^2\left(k^2+1\right)}{a^2+k^2b^2}$

Suy ra

$$\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{b^2+k^2a^2}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}+\frac{a^2+k^2b^2}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(k^2+1\right)}{a^2b^2\left(k^2+1\right)}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Vậy $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

2) Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng MN khi đó OH là đường cao của tam giác vuông MON. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính

$$R=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ví dụ 1.4.28. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ có các tiêu điểm F_1, F_2. Lấy M là điểm bất kì trên (H). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là hằng số.

Lời giải.

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$\Delta_1: y=\frac{b}{a}x$ hay $bx-ay=0$ và $\Delta_2: y=-\frac{b}{a}x$ hay $bx+ay=0$

Giả sử $M(x_M;y_M)$ khi đó theo công thức khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng ta có $d(M;\Delta_1)=\frac{|bx_M-ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $d(M;\Delta_2)=\frac{|bx_M+ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Suy ra $d(M;\Delta_1)d(M;\Delta_2)=\frac{|bx_M-ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_M+ay_M|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2x_M^2-a^2y_M^2}{a^2+b^2}$

Mặt khác M thuộc (H) nên : $\frac{{x_M}^2}{a^2}-\frac{{y_M}^2}{b^2}=1$ hay $b^2x_M^2-a^2y_M^2=a^2b^2$

Do đó $d(M;\Delta_1)d(M;\Delta_2)=\frac{a^2.b^2}{a^2+b^2}$ là hằng số

Ví dụ 1.4.29. Cho parabol (P): $y^2=2ax$. Đường thẳng Δ bất kỳ đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k(k\neq 0)$ cắt (P) tại M và N. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M và N đến trục Ox là hằng số.

Lời giải.

Tiêu điểm $F(a;0)$.

Vì đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k\neq 0$ nên có phương trình: $\Delta: y=k\left(x-\frac{a}{2}\right)$

Hoành độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của phương trình:

$k^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=2ax \Leftrightarrow 4k^2x^2-4\left(2a+k^2a\right)x+k^2a^2=0$ (*)

$\Delta'=4\left(2a+k^2a\right)^2-4k^4a^2=16a^2\left(1+k^2\right)>0$

Theo định lý Viet có $x_M.x_N=\frac{a^2}{4}$

Mặt khác ta có $d(M;Ox)=|y_M|$; $d(N;Ox)=|y_N|$

Suy ra $d(M;Ox).d(N;Ox)=|y_M.y_N|=\sqrt{4a^2|x_M.x_N|}=a^2$.

Ví dụ 1.4.30. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$; $F_2(\sqrt{3};0)$ và đi qua điểm $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$. Lập phương trình chính tắc của (E) và với mọi điểm M trên elip, hãy tính biểu thức:

$$P=F_1M^2+F_2M^2-3OM^2-F_1M.F_2M.$$

Lời giải.

Giả sử (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b>0$.

Theo giả thiết bài toán ta có hệ $\begin{cases}a^2=b^2+3\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow a^2=4, b^2=1$.

Suy ra (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

Xét $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\Rightarrow y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$.

Suy ra $P=(a+ex_0)^2+(a-ex_0)^2-2(x_0^2+y_0^2)-(a^2-e^2x_0^2)=1$.

Ví dụ 1.4.31. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y+5=0$ và hai elip $(E_1): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $(E_2): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ có cùng tiêu điểm. Biết rằng (E_2) đi qua điểm M thuộc Δ. Lập phương trình (E_2), biết (E_2) có độ dài trục lớn nhỏ nhất.

Lời giải.

Vì hai E líp có cùng tiêu điểm nên ta có: $a^2-b^2=25-16=9$

Gọi $M(m;m+5)\in\Delta$, do M thuộc (E_1) nên: $\frac{m^2}{a^2}+\frac{(m+5)^2}{b^2}=1$

$\Leftrightarrow m^2(a^2-9)+(m+5)^2a^2=a^2(a^2-9)\Leftrightarrow a^4-2(m^2+5m+17)a^2+9m^2=0$

Vì $a^2>9$ nên ta có $a^2=m^2+5m+17+\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)}=f(m)$

- Nếu $m^2+5m\geq 0\Rightarrow f(m)>17$
- Với $m\in(-5;0)$, ta có:

$$f(m)=\frac{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)-(m^2+5m)^2}{\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)}-(m^2+5m)}+17$$

$$=\frac{(5m+17)^2}{\sqrt{(m^2+8m+17)(m^2+2m+17)}-(m^2+5m)}+17\geq 17$$

Đẳng thức xảy ra khi $m=-\frac{17}{5}$. Khi đó $a^2=17, b^2=8$.

Vậy phương trình $(E_2): \frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

Ví dụ 1.4.32. Trên hệ tọa độ Oxy cho Elip: $(E): \frac{x^2}{4}+y^2=1$ và điểm $C(0;2)$. Tìm hai điểm A, B nằm trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại C và có chu vi lớn nhất.

Lời giải.

Vì tam giác ABC cân tại C nằm trên Ox nên A và B đối xứng nhau qua Ox

Gọi $A(x_0;y_0)\in(E)$, suy ra $B(x_0;-y_0)$ ta giả sử $y_0>0$.

Chu vi tam giác ABC:

$$2p=2AC+BC=2\sqrt{(2-x_0)^2+y_0^2}+2|y_0|=2\sqrt{(2-x_0)^2+1-\frac{x_0^2}{4}}+2\sqrt{1-\frac{x_0^2}{4}}$$

$$=\sqrt{2-x_0}\left(\sqrt{10-3x_0}+\sqrt{2+x_0}\right)=\sqrt{2-x_0}\left(\sqrt{10-3x_0}+\frac{\sqrt{(4+\sqrt{13})(2+x_0)}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}}\right)$$

$$\leq\sqrt{2-x_0}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4+\sqrt{13}}\right)\left(10-3x_0+(4+\sqrt{13})(2+x_0)\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{4+\sqrt{13}}}\sqrt{(2-x_0)(1+\sqrt{13})}.\sqrt{18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_0}$$

$$\leq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}\left[(2-x_0)(1+\sqrt{13})+18+2\sqrt{13}+(1+\sqrt{13})x_0\right]$$

$$=2\sqrt{\frac{\left(5+\sqrt{13}\right)^3}{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x_0=\frac{-8}{1+\sqrt{13}}\Rightarrow y_0=\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{13})}}{1+\sqrt{13}}$.

Vậy $A\left(-\frac{8}{1+\sqrt{13}};\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{13})}}{1+\sqrt{13}}\right), B\left(-\frac{8}{1+\sqrt{13}};-\frac{\sqrt{2(1+\sqrt{13})}}{1+\sqrt{13}}\right)$.

BÀU TẬP

Bài 1.4.1. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;1), B(4;3)$ và có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+5=0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Vì (C) đi qua A, B nên ta có: $\begin{cases}-4a-2b+c=-5\\-8a-6b+c=-25\end{cases}$ (1)

Mặt khác: (C) có tâm $I(a;b)$ thuộc $\Delta: x-y+5=0\Rightarrow a-b+5=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}-4a-2b+c=-5\\-8a-6b+c=-25\\a-b+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=5\\c=5\end{cases}$

Vậy phương trình $(C): x^2+y^2-10y+5=0$.

Bài 1.4.2. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(0;5), B(2;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R=\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C).

Ta có phương trình $(C): (x-a)^2+(y-b)^2=10$.

Do $A,B\in(C)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}a^2+b^2-10b+15=0\\a^2+b^2-4a-6b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-10b+15=0\\4a-4b+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}\\\begin{cases}a=3\\b=6\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=10 \text{ và } (x-3)^2+(y-6)^2=10.$$

Bài 1.4.3. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(1;0), B(2;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng d: $x-y=0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường tròn (C) cần tìm có phương trình là : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Do $A,B\in(C)$ nên ta có: $\begin{cases}1-2a+c=0\\4-4a+c=0\end{cases}$.

Mặt khác (C) tiếp xúc với d nên suy ra $d\left(I,(d)\right) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2+b^2-c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab-2c=0 \ (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ ta được $a=\frac{3}{2}; b=\frac{1}{2}; c=2$ hoặc $a=\frac{3}{2}; b=-\frac{7}{2}; c=2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

$x^2+y^2-3x-y+2=0$ và $x^2+y^2-3x+7y+2=0$.

Bài 1.4.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $d: x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn (C′) có tâm M nằm trên d, bán kính bằng 2 lần bán kính đường tròn (C) và (C′) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=1$

Ta có $M \in d \Rightarrow M(x; x+3)$.

Vì (C) và (C′) tiếp xúc ngoài nên ta có $MI = 3R \Leftrightarrow (x-1)^2+(x+2)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa yêu cầu bài toán là:

$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ và $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

Bài 1.4.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$ và điểm $A(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, O và tiếp xúc với d.

Hướng dẫn giải

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là đường tròn cần tìm

Vì (C) đi qua O, A $\Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a-b=1 \end{cases}$ (1)

Do (C) tiếp xúc với $d: x-y+1-\sqrt{2}=0 \Rightarrow d\left(I,(d)\right)=R$

$\Leftrightarrow \frac{\left|a-b+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2+b^2-c}$ (2)

Từ (1) và (2) giải hệ thu được $a=0, b=1, c=0$ hoặc $a=1, b=0, c=0$.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn là : $x^2+y^2-2y=0$ và $x^2+y^2-2x=0$.

Bài 1.4.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C′) tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Ta có $OA^2+OB^2=AB^2=2 \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O. Mặt khác OI là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên A, B thuộc các trục toạ độ. Vậy:

- $A(1;0); B(0;1)$, phương trình đường thẳng $AB: x+y-1=0$
- $A(-1;0); B(0;-1)$, phương trình đường thẳng $AB: x+y+1=0$.

Bài 1.4.7. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(2;3)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua M và tiếp xúc với hai trục tọa độ.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C). Vì (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và đi qua $M(2;3)$ nên ta suy ra được I nằm trong góc phần tư thứ nhất hay $a,b>0$

Ta có $d(I,Ox)=d(I,Oy) \Leftrightarrow a=b=R$.

Phương trình (C): $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.

Vì $M \in (C)$ nên ta có:

$(2-a)^2+(3-a)^2=a^2 \Leftrightarrow a^2-10a+13=0 \Leftrightarrow a=5\pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là:

$(x-5-2\sqrt{3})^2+(y-5-2\sqrt{3})^2=(5+2\sqrt{3})^2$

hoặc $(x-5+2\sqrt{3})^2+(y-5+2\sqrt{3})^2=(5-2\sqrt{3})^2$.

Bài 1.4.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$, $\Delta_2: x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C₁); biết đường tròn (C₁) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

Hướng dẫn giải

Gọi $K(a;b)$, $K \in (C) \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=\frac{4}{5}$ (1)

Ta có (C_1) tiếp xúc với $\Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{5\sqrt{2}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} 5(a-2)^2+5b^2=4 \\ 5|a-b|=|a-7b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(a-2)^2+5b^2=4 \\ 5(a-b)=a-7b \end{cases} \ \text{(I)}$$

Hoặc $\begin{cases} 5(a-2)^2+5b^2=4 \\ 5(a-b)=-a+7b \end{cases}$ (II)

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2-20a+16=0 \\ b=-2a \end{cases}$ vô nghiệm.

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 25b^2-40b+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b)=\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Bán kính $(C_1): R=\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Vậy $K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$ và $R=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Bài 1.4.9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy, cho hai đường tròn: $(C_1): x^2+y^2-10x=0$ và $(C_2): x^2+y^2+4x-2y-20=0$

Viết phương trình đường tròn (C) đi qua các giao điểm của (C₁), (C₂) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x+6y-6=0$.

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-10x=0 \\ x^2+y^2+4x-2y-20=0 \end{cases}$. Giải hệ này ta được hai cặp nghiệm $(x;y)=(1;-3),(2;4)$. Suy ra (C_1) và (C_2) cắt nhau tại $A(1;-3), B(2;4)$.

Gọi I là tâm của (C), ta có $I(6-6m;m)$

Vì $IA=IB$ nên ta có: $(5-6m)^2+(m+3)^2=(4-6m)^2+(m-4)^2 \Leftrightarrow m=-1$

Suy ra $I(12;-1)$, $R=IA=5\sqrt{5}$.

Vậy phương trình (C): $(x-12)^2+(y+1)^2=125$.

Bài 1.4.10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua T_1, T_2.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=2$. Do $IM=2\sqrt{5}>R$ nên điểm M ở ngoài đường tròn (C). Gọi $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M.

Ta có: $\begin{cases} T\in(C) \\ MT\perp IT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T\in(C) \\ \overrightarrow{MT}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases}$

Mà $\overrightarrow{MT}=(x_0+3;y_0-1); \overrightarrow{IT}=(x_0-1;y_0-3)$.

Do đó ta có: $\begin{cases} {x_0}^2+{y_0}^2-2x_0-6x_0+6=0 \\ (x_0+3)(x_0-1)+(y_0-1)(y_0-3)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_0}^2+{y_0}^2-2x_0-6x_0+6=0 \\ {x_0}^2+{y_0}^2+2x_0-4y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_0+y_0-3=0$ (1)

Tọa độ các tiếp điểm T_1, T_2 thỏa mãn đẳng thức (1).

Vậy phương trình đường thẳng đi qua T_1, T_2 là: $2x+y-3=0$.

Bài 1.4.11. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d_1: mx+(m-1)y+m=0$ và $d_2: (2m-2)x-2my+1=0$. Chứng minh rằng d₁ và d₂ luôn cắt nhau tại một điểm nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $d_1 \perp d_2$ nên d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại I.

Mặt khác: d_1 đi qua điểm cố định $A(-1;0)$, d_2 đi qua điểm cố định $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Do đó khi m thay đổi thì I luôn nằm trên đường tròn đường kính AB.

Bài 1.4.12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y=0$ và đường thẳng $d: x-y=0$. Tìm tọa độ các điểm M trên đường thẳng d, biết từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) và khoảng cách từ điểm $N(1;-1)$ đến AB bằng $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải

Vì $M\in d \Rightarrow M(m;m)$

Gọi $A(x_0;y_0)$. Khi đó, ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MA}=0 \\ A\in(C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2-(m+1)x_0-(m-2)y_0-m=0 \\ x_0^2+y_0^2-2x_0+4y_0=0 \end{cases}$

Suy ra $(m-1)x_0+(m+2)y_0+m=0$.

Do đó, ta có phương trình AB là: $(m-1)x+(m+2)y+m=0$.

Mặt khác: $d(N,AB)=\frac{3}{\sqrt{5}}$ nên ta có phương trình: $\frac{|m-3|}{\sqrt{(m-1)^2+(m+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

Giải phương trình này ta tìm được $m=0, m=-\frac{58}{13}$.

Ta loại $m=0$, vì khi đó $M\in(C)$.

Vậy có một điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $M\left(-\frac{58}{13};-\frac{58}{13}\right)$.

Bài 1.4.13. Cho elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(1;1)$ và cắt (E) tại hai điểm A,B sao cho M là trung điểm của AB.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ đi qua M, với vec tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$ có dạng:

$$\begin{cases}x=1+at\\y=1+bt\end{cases}\left(a^2+b^2>0\right).$$

$$A,B\in\Delta\Rightarrow\begin{cases}x_A=1+at_1\\y_A=1+bt_1\end{cases}\text{ và }\begin{cases}x_B=1+at_2\\y_B=1+bt_2\end{cases}$$

M là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\y_A+y_B=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(t_1+t_2)=0\\b(t_1+t_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow t_1+t_2=0\left(\text{do } a^2+b^2>0\right)$$

$A,B\in(E)\Rightarrow t_1,t_2$ là nghiệm của phương trình

$$4(at+1)^2+9(bt+1)^2=36\Leftrightarrow\left(4a^2+9b^2\right)t^2+(8a+18b)t-23=0.$$

$$t_1+t_2=0\Leftrightarrow 4a+9b=0$$

Chọn $a=9,b=-4\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1+9t\\y=1-4t\end{cases}$ hay $4x+9y-13=0$.

Bài 1.4.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E). Biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(x_0;y_0)$, do A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B(x_0;-y_0)$.

$$AB^2=4{y_0}^2;AC^2=(2-x_0)^2+{y_0}^2$$

Vì $A\in(E)\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{{y_0}^2}{1}=1\Leftrightarrow{y_0}^2=\frac{4-{x_0}^2}{4}$ (1)

ABC là tam giác đều nên $AB=AC\Leftrightarrow 4{y_0}^2=(x_0-2)^2+{y_0}^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $7{x_0}^2-16x_0+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=\frac{2}{7}\end{array}\right.$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=0\Rightarrow A\equiv C$ loại

Với $x_0=\frac{2}{7}$ thay vào (1) ta được ${y_0}^2=\frac{48}{49}\Leftrightarrow x_0=\mp\frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right);B\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};\frac{-4\sqrt{3}}{7}\right);B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Bài 1.4.15. Cho elip $(E):\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (E) biết (d) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=2OB$.

Hướng dẫn giải

Do tính đối xứng của (E) nên ta chỉ cần xét trường hợp tiếp điểm nằm ở góc phần tư thứ nhất, khi đó Gọi $A(2m;0),B(0;m)$ $m>0$.

Phương trình $AB:\frac{x}{2m}+\frac{y}{m}=1\Leftrightarrow x+2y-2m=0$.

AB tiếp xúc với $(E)\Leftrightarrow a^2A^2+b^2B^2=C^2\Leftrightarrow 64+36=4m^2\Leftrightarrow m=5\ (m>0)$

Vì tính đối xứng nên có 4 tiếp tuyến thỏa mãn là :

$$x+2y-10=0,x+2y+10=0,x-2y-10=0,x-2y+10=0$$

Bài 1.4.16. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E):\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $\Delta:x-\sqrt{2}y+2=0$. Giả sử Δ cắt (E) tại B, C. Tìm điểm $A\in\Delta$ để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(x_0;y_0)\in(E)$ là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ A đến (Δ) là $AH=\frac{\left|x_0-\sqrt{2}y_0+2\right|}{\sqrt{3}}$.

Vì BC không đổi nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi AH lớn nhất.

$$\left|x_0-\sqrt{2}y_0+2\right|\le\left|x_0-\sqrt{2}y_0\right|+2=\left|\frac{x_0}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{2}+\left(-\frac{y_0}{2}\right).2\sqrt{2}\right|+2$$

$$\le\sqrt{16\left(\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{4}\right)}+2=6\Rightarrow AH\le 2\sqrt{3}.$$

Và $AH = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{y_0}{2} \\ x_0 - \sqrt{2}y_0 \ge 0 \\ \dfrac{x_0^2}{8} + \dfrac{y_0^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(2;-\sqrt{2}\right)$.

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $A\left(2;-\sqrt{2}\right)$.

Bài 1.4.17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc một đường tròn. Hãy lập phương trình chính tắc của (E).

Hướng dẫn giải

Gọi $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ là phương trình elip cần tìm.

Theo giả thiết $a = 2\sqrt{2}$, các đỉnh trên Oy là $B_1(0;-b), B_2(0;b)$, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi nên và có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn nên $F_1B_1F_2B_2$ là hình vuông suy ra $b = c$ mà $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 2$.

Vậy PT $(E): \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Bài 1.4.18. Cho Elip $(E): \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ có hai tiêu điểm là F_1 và F_2.

Tìm tọa độ các điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 120^0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $a^2 = 100, c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 25 = 75$

$$M(x;y) \in (E), MF_1 = a + \frac{c}{a}x; MF_2 = a - \frac{c}{a}x$$

Ta có: $\cos\widehat{F_1MF_2} = \dfrac{MF_1^{\ 2} + MF_2^{\ 2} - F_1F_2^{\ 2}}{2MF_1.MF_2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 + \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 - (2c)^2}{2\left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a - \frac{c}{a}x\right)} \Leftrightarrow -a^2 + \left(\frac{cx}{a}\right)^2 = 2a^2 + 2\left(\frac{cx}{a}\right)^2 - 4c^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{cx}{a}\right)^2 = 3a^2 - 4c^2 = 3.100 - 4.75 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5; y = -5.$$

Vậy có hai điểm $M_1(0;5); M_2(0;-5)$ thỏa mãn.

Bài 1.4.19. Lập phương trình chính tắc Hypebol (H), biết (H) đi qua $M(\dfrac{4\sqrt{10}}{3};1)$ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của Elip $(E): \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{11} = 1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình Hypebol (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Vì $M \in (H) \Rightarrow \dfrac{160}{9a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 160b^2 - 9a^2 = 9a^2b^2$ (1)

Vì (E) có tiêu điểm $F_1(5;0)$ nên đó cũng là tiêu điểm của (H)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 - b^2$ thay vào (1) ta được:

$160b^2 - 9(25 - b^2) = 9(25 - b^2)b^2 \Leftrightarrow 9b^4 - 56b^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 16$.

Vậy phương trình của (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Bài 1.4.20. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho parabol (*P*) có phương trình: $y = x^2 - 2x$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Chứng minh rằng (*P*) giao (*E*) tại 4 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

Hướng dẫn giải

Hoành độ giao điểm của (E) và (P) là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$

Ta có: $f(x)$ liên tục trên R có $f(-1)f(0) < 0$, $f(0)f(1) < 0$, $f(1)f(2) < 0$, $f(2)f(3) < 0$ suy ra (*) có 4 nghiệm phân biệt, do đó (E) cắt (P) tại 4 điểm phân biệt.

Tọa độ các giao điểm của (E) và (P) thỏa mãn hệ : $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 16x = 8y \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0 \quad (**).$$

(**) là phương trình của đường tròn có tâm $I=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{161}}{9}$

Do đó 4 giao điểm của (E) và (P) cùng nằm trên đường tròn có phương trình (**).

Bài 1.4.21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho Elip (E): $x^2+5y^2=5$, Parabol (P): $x=10y^2$. Hãy viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): x+3y-6=0$, đồng thời tiếp xúc với trục hoành Ox và cát tuyến chung của Elip (E) với Parabol (P).

Hướng dẫn giải

Đường thẳng đi qua các giao điểm của (E) và (P): $x=2$

Tâm $I\in\Delta$ nên: $I=(6-3b;b)$. Ta có: $|6-3b-2|=|b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-3b=b\\4-3b=-b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=1\\b=2\end{array}\right.$

Vậy (C): $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ hoặc (C): $x^2+(y-2)^2=4$

Bài 1.4.22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông.

Hướng dẫn giải

Phương trình chính tắc của (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Do (E) có độ dài trục lớn là 8 nên ta có $2a=8$, tức $a=4$. Và như thế, phương trình của (E) có thể được viết lại thành: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Tiếp theo, từ giả thiết (C): $x^2+y^2=8$ cắt (E) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của hình vuông, ta thấy rằng bốn đỉnh đó phải nằm trên các đường thẳng $y=x$ và $y=-x$. Suy ra (C), (E) và đường thẳng $d: y=x$ có với nhau hai điểm chung.

Mặt khác, ta có tọa độ giao điểm của (C) với d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}y=x\\x^2+y^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x\\x^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x=2\\y=x=-2\end{array}\right.$$

Suy ra $(C)\cap d=\{A,\ B\}$ với A(2, 2) và B(−2, −2). Và từ các lý luận ở trên, ta có $A\in(E)$. Thay tọa độ của điểm A vào phương trình của (E), ta được $b^2=\frac{16}{3}$. Vậy phương trình chính tắc của (E) cần tìm là: (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$.

Bài 1.4.23. Trong mặt phẳng Oxy cho họ đường thẳng:

$$d_m: (4-m^2)x-6my+3(4+m^2)=0.$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi thì họ đường thẳng d_m luôn tiếp xúc với một đường cônic cố định.

Hướng dẫn giải

Xét M(x;y) là điểm không thuộc bất kì đường thẳng nào của họ d_m. Khi đó phương trình $(4-m^2)x-6my+3(4+m^2)=0 \Leftrightarrow (3-x)m^2-6ym+4x+12=0$ vô nghiệm với mọi m

Hay $\Delta'=9y^2+4x^2-36<0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1$.

Xét Elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\(4-m^2)x-6my+3(4+m^2)=0\end{cases}$

có nghiệm duy nhất với mọi m

Nên d_m luôn tiếp xúc với (E).

§ 5. NHÓM CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TAM GIÁC.

Các bài toán thuộc nhóm này chúng ta gặp nhiều nhất và trong mỗi bài toán có tính chất tổng hợp. Các bài toán này chủ yêu xoay quanh vấn đề xác định tọa độ các đỉnh của tam giác, tức là bài toán xác định tọa độ của một điểm.

Ví dụ 1.5.1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(4;−1) và phương trình hai đường trung tuyến $BB_1: 8x-y-3=0, CC_1: 14x-13y-9=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

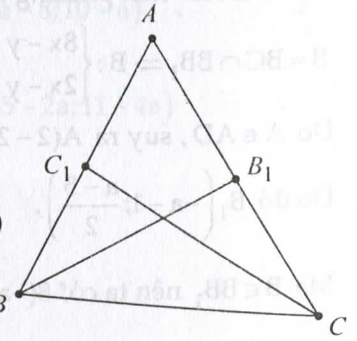
Lời giải.

Vì $B\in BB_1$ nên $B(b;8b-3)$, C₁ là trung điểm của AB nên ta có $C_1\left(\frac{b+4}{2};4b-2\right)$

Mặt khác: $C_1\in CC_1$ nên suy ra

$7(b+4)-13(4b-2)-9=0 \Leftrightarrow b=-1 \Rightarrow B(-1;-11)$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, suy ra tọa độ của G là nghiệm của hệ



$$\begin{cases}8x-y-3=0\\14x-13y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right).$$

Suy ra $\begin{cases}x_C=3x_G-x_A-x_B=-2\\y_C=3y_G-y_A-y_B=11\end{cases}\Rightarrow C(-2;11).$

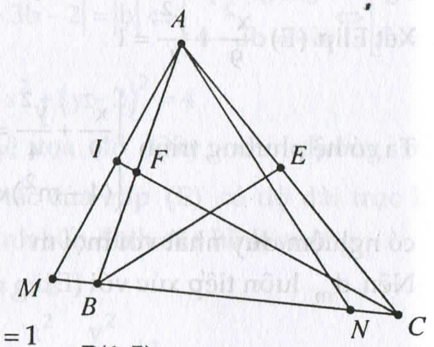
Ví dụ 1.5.2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(4;-1)$ và phương trình hai đường phân giác $BE:x-1=0, CF:x-y-1=0$. Tính tọa độ các điểm B, C.

Lời giải.

Gọi M là điểm đối xứng với A qua BE, suy ra $M\in BC$.

Vì $AM\perp BE$ nên $AM:y+1=0$.

Do đó $AM\cap BE$ tại $I(1;-1)$, M đối xứng với A qua I nên suy ra $M(-2;-1)$.



Tương tự, gọi N là điểm đối xứng với A qua CF, suy ra $N\in BC$ và $N(0;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(2;4)\Rightarrow$ phương trình $BC:2x-y+3=0$.

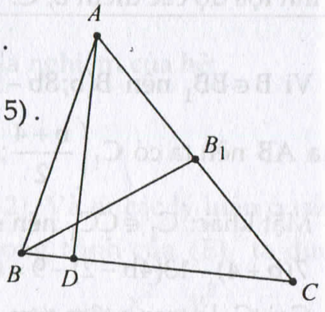
Vì $B=BE\cap BC\Rightarrow B:\begin{cases}x-1=0\\2x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\Rightarrow B(1;5).$

$C=CF\cap BC\Rightarrow C:\begin{cases}x-y-1=0\\2x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-5\end{cases}\Rightarrow C(-4;-5).$

Ví dụ 1.5.3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $C(-4;-5)$ và phương trình đường cao AD: $x+2y-2=0$, đường trung tuyến BB_1: $8x-y-3=0$. Tìm tọa độ các điểm A, B.

Lời giải.

Vì $BC\perp AD$ nên phương trình $BC:2x-y+3=0$.



$B=BC\cap BB_1\Rightarrow B:\begin{cases}8x-y-3=0\\2x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\Rightarrow B(1;5).$

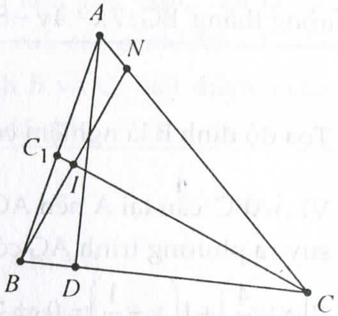
Do $A\in AD$, suy ra $A(2-2a;a)$.

Do đó $B_1\left(-a-1;\dfrac{a-5}{2}\right)$.

Mà $B\in BB_1$ nên ta có: $8(-a-1)-\dfrac{a-5}{2}-3=0\Leftrightarrow a=-1\Rightarrow A(4;-1)$.

Ví dụ 1.5.4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(1;5)$ và phương trình đường cao $AD:x+2y-2=0$, đường phân giác trong $CC_1:x-y-1=0$. Tính tọa độ các điểm A, C.

Lời giải.



Ta có phương trình $BC:2x-y+3=0$.

Vì $C=CC_1\cap BC$

$\Rightarrow C:\begin{cases}2x-y+3=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-5\end{cases}\Rightarrow C(-4;-5).$

Gọi N là điểm đối xứng với B qua CC_1, ta có $N\in AC$ và $N(6;0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{NC}=(10;5)$, phương trình $AC:x-2y-6=0$.

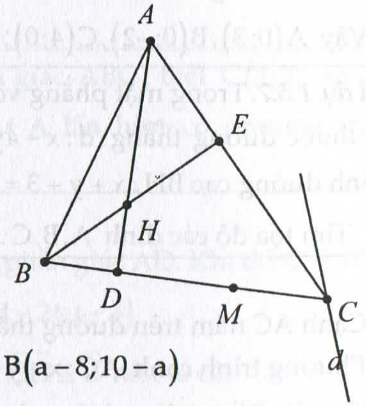
Tọa độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-6=0\\x+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}\Rightarrow A(4;-1).$

Ví dụ 1.5.5. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có phương trình các đường cao AD: $2x-y+1=0$, BE: $x+y-2=0$, C thuộc đường thẳng $d:x+y-6=0$ và BC đi qua $M(0;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, suy ra tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-y+1=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right).$$



Vì $C\in d\Rightarrow C(a;6-a)$. Do $AC\perp BE$ nên phương trình AC có dạng: $x-y+6-2a=0$

Tương tự, phương trình $BC:x+2y+a-12=0=0$.

Suy ra $B:\begin{cases}x+2y+a-12=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-8\\y=10-a\end{cases}\Rightarrow B(a-8;10-a)$

$A:\begin{cases}2x-y+1=0\\x-y+6-2a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-2a\\y=11-4a\end{cases}\Rightarrow A(5-2a;11-4a)$

Suy ra $\overrightarrow{MC}=(a;3-a),\overrightarrow{MB}=(a-8;7-a)$.

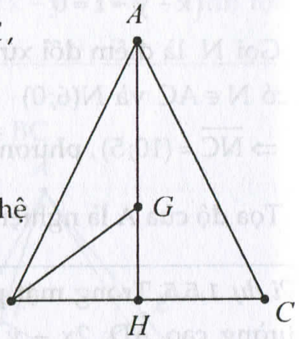
Vì B, C, M thẳng hàng nên $\dfrac{a-8}{a}=\dfrac{a-7}{a-3}\Leftrightarrow a=6$.

Vậy $A(-7;-13),B(-2;4),C(6;0)$.

Ví dụ 1.5.6. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng $BC: x-2y-4=0$ và phương trình đường thẳng $BG: 7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 7x-4y-8=0 \end{cases} \Rightarrow B(0;-2)$



Vì ΔABC cân tại A nên AG là đường cao của ΔABC, suy ra phương trình AG có dạng:

$2\left(x-\frac{4}{3}\right)+1\left(y-\frac{1}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Gọi $H = AG \cap BC$ thì tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x-2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow H(2;-1)$

Vì H là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_H - x_B \\ y_C = 2y_H - y_B \end{cases} \Rightarrow C(4;0)$.

Ta có $x_G = \frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C), y_G = \frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C) \Rightarrow A(0;3)$.

Vậy $A(0;3), B(0;-2), C(4;0)$.

Ví dụ 1.5.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x-4y-2=0$, cạnh BC song song với d, phương trình đường cao $BH: x+y+3=0$ và trung điểm cạnh AC là $M(1;1)$.

Tìm tọa độ các đỉnh A,B,C.

Lời giải.

Cạnh AC nằm trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với BH

Phương trình cạnh $AC: x-y=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x-4y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra tọa độ điểm $C\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Cạnh BC đi qua C và song song với đường thẳng d nên có phương trình $BC: x-4y+8=0$

Tọa đệ đỉnh B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+3=0 \\ x-4y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(-4;1)$.

Ví dụ 1.5.8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6;6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm E(1;−3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Lời giải.

Gọi $d: x+y-4=0$.

Vì BC // d nên phương trình BC có dạng: $x+y+m=0$

Lấy $I(1;3) \in d$, ta có: $d(I,BC) = d(A,d) = 4\sqrt{2} \Rightarrow |m+4| = 8 \Rightarrow m=-12, m=4$

Vì A và I ở cùng phía so với BC nên ta có $m=4 \Rightarrow BC: x+y+4=0$.

Đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình : $x-y=0$.

Tọa độ trung điểm P của BC : $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+4=0 \end{cases} \Rightarrow P(-2;-2)$

Do $B \in BC \Rightarrow B(b;-4-b)$ và P là trung điểm BC suy ra $C(-4-b;b)$

Mặt khác $AB \perp CE$ nên ta có $(b-6)(b+4)+(b+10)(b+3)=0 \Leftrightarrow b=0, b=-6$

Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$B(0;-4), C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2), C(2;-6)$.

Ví dụ 1.5.9. Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác ABC, biết $C(4;3)$ và các đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ A lần lượt có phương trình $x+2y-5=0$, $4x+13y-10=0$.

Lời giải.

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AD. Khi đó $C' \in AB$.

Gọi $H = AD \cap CC' \Rightarrow H(5-2t;t) \Rightarrow \overrightarrow{CH} = (1-2t;t-3)$

Mặt khác AD có $\vec{u} = (-2;1)$ là VTCP và do $\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}$ nên ta có:

$\overrightarrow{CH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2(1-2t)+1(t-3)=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3;1)$.

Do H là trung điểm của CC', nên $C'(2;-1)$.

Vì $A = AD \cap AM$ (M là trung điểm của BC) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 4x+13y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(9;-2)$.

Khi đó đường thẳng AB có phương trình $x+7y+5=0$ nên $B(-7t-5;t)$.

Vì $M\in AM\Rightarrow M\left(\frac{-13s+10}{4};s\right)$.

Lại vì M là trung điểm của BC nên $\begin{cases}-13s+10=-14t-2\\2s=3+t\end{cases}\Rightarrow B(-12;1)$.

Ví dụ 1.5.10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định tọa độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, do tam giác ABC cân tại A nên $AM\perp BC$.

Suy ra phương trình của $AM: x+y-3=0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-y-4=0\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow AM=\frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=AM.BM=18\Rightarrow BM=\frac{18}{AM}=2\sqrt{2}$

Mặt khác: $B\in\Delta$, suy ra $B(b;b-4)$ nên:

$$BM^2=8\Leftrightarrow\left(b-\frac{7}{2}\right)^2+\left(b-\frac{7}{2}\right)^2=8\Leftrightarrow\left(b-\frac{7}{2}\right)^2=4\Leftrightarrow b=\frac{11}{2},b=\frac{3}{2}.$$

- Với $b=\frac{11}{2}\Rightarrow B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right),C\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$.
- Với $b=\frac{11}{2}\Rightarrow B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right),C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 1.5.11. Cho tam giác ABC với $A(2;-4),B(0;-2)$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $d: 3x-y+1=0$. Hãy tìm tọa độ của C, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 3.

Lời giải.

Trung điểm I của AB là $I(1;-3)$, vì G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra

$$S_{AGB}=\frac{1}{3}S_{ABC}=1\Rightarrow\frac{1}{2}d(G,AB).AB=1\Rightarrow d(G,AB)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vì $G\in d$ nên suy ra $G(a;3a+1)$.

Phương trình đường thẳng $AB: x+y+2=0$ nên $d(G,AB)=\frac{|4a+3|}{\sqrt{2}}$

Do đó $d(G,AB)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{|4a+3|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=-1,a=-\frac{1}{2}$

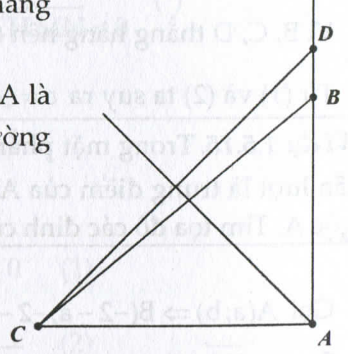
- $a=-\frac{1}{2}\Rightarrow G\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, mà $\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=-\frac{7}{2}\\y_C=\frac{9}{2}\end{cases}$.

Do đó $C\left(-\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$

- Tương tự với $a=-1$ ta tìm được $C(-5;0)$.

Ví dụ 1.5.12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng $d: x+y-5=0$, ta tìm được $D(4;9)$.

Vì A thuộc đường tròn đường kính CD nên A là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn đường kính CD, suy ra tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+y-5=0\\x^2+(y-5)^2=32\end{cases}\Rightarrow A(4;1)\ \ (\text{vì } x_A>0).$$

Suy ra $AC=8\Rightarrow AB=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AC}=6$.

Vì B thuộc đường thẳng $AD: x-4=0$ nên $B(4;y)$

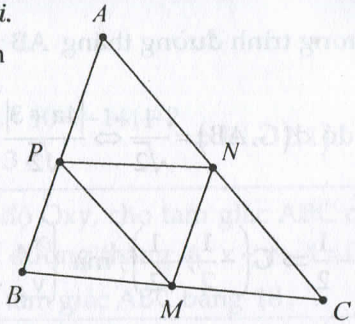
Từ $AB=6\Rightarrow(y-1)^2=36\Rightarrow y=-5,y=7$

Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng nên ta có $B(4;7)$.

Vậy phương trình $BC: 3x-4y+16=0$.

Ví dụ 1.5.13. Cho tam giác ABC có $M(2;0),N(-1;-1),P(-2;3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Lời giải.



Do M,N,P là trung điểm các cạnh nên ta có $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{MN}$ hay suy ra

$$\begin{cases} x_A+2=-3 \\ y_A-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=-5 \\ y_A=2 \end{cases} \Rightarrow A(-5;2).$$

Từ đó, suy ra $B(1;4), C(3;-4)$.

Ví dụ 1.5.14. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(1;0), N(4;-3)$ lần lượt là trung điểm của AB, AC; D(2;6) là chân đường cao hạ từ A lên BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $A(a;b)$, suy ra $\overrightarrow{DA}=(a-2;b-6)$, $\overrightarrow{MN}=(3;-3)$.

Vì $AD \perp MN \Rightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{MN}=0 \Leftrightarrow a-2-b+6=0 \Leftrightarrow a-b=-4$ (1).

Lấy đối xứng điểm A qua M, N ta có: $B(2-a;-b)$, $C(8-a;-6-b)$

Suy ra $\overrightarrow{BD}=(a;6+b)$, $\overrightarrow{CD}=(a-6;b+12)$

Vì B, C, D thẳng hàng nên ta có: $\dfrac{a-6}{a}=\dfrac{b+12}{b+6} \Leftrightarrow a+b=-6$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $a=-5; b=-1$. Vậy $A(-5;-1), B(7;1), C(13;-5)$.

Ví dụ 1.5.15. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(-1;-1), N(0;2)$ lần lượt là trung điểm của AB, AC và D(1; 0) là chân đường phân giác trong góc A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Lời giải.

Gọi $A(a;b) \Rightarrow B(-2-a;-2-b), C(-a;4-b)$.

Suy ra $\overrightarrow{BD}=(a+3;b+2), \overrightarrow{CD}=(a+1;b-4)$

Vì B, C, D thẳng hàng nên $\dfrac{a+3}{a+1}=\dfrac{b+2}{b-4} \Leftrightarrow 3a-b+7=0 \Rightarrow b=3a+7$ (1).

Mặt khác D là chân đường phân giác trong góc A nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}}{AC} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{AD}=(1-a;-b), \overrightarrow{AB}=(-2a-2;-2b-2), \overrightarrow{AC}=(-2a;4-2b)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)(a+1)+b(b+1)}{\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}}=\dfrac{(a-1)a+(b-2)b}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có: $\dfrac{a^2-1+(3a+7)(3a+8)}{\sqrt{(a+1)^2+(3a+8)^2}}=\dfrac{a^2-a+(3a+5)(3a+7)}{\sqrt{a^2+(3a+5)^2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+9a+11}{\sqrt{2a^2+10a+13}}=\frac{2a^2+7a+7}{\sqrt{2a^2+6a+5}}$$

$$\Leftrightarrow (2a^2+9a+11)^2(2a^2+6a+5)-(2a^2+7a+7)^2(2a^2+10a+13)=0$$

$$\Leftrightarrow a^3+6a^2+12a+8=0 \Leftrightarrow (a+2)(a^2+4a+4)=0 \Leftrightarrow a=-2, b=1.$$

Vậy $A(-2;1), B(0;-3), C(2;3)$.

Ví dụ 1.5.16. Trong mặt phẳng Oxy, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết M(1;4), N(-1;3) là trung điểm của BC, CA và $H\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $C(x;y) \Rightarrow B(2-x;8-y), A(-2-x;6-y)$

Vì $H(\frac{1}{3};-\frac{5}{3})$ là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{MN}=0 \end{cases}$ (*)

Mà $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{7}{3}+x;-\frac{23}{3}+y\right)$, $\overrightarrow{BC}=(2x-2;2y-8)$,

$\overrightarrow{CH}=(\frac{1}{3}-x;-\frac{5}{3}-y)$, $\overrightarrow{MN}=(-2;-1)$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{7}{3}+x)(2x-2)+(-\frac{23}{3}+y)(2y-8)=0 & (1) \\ 2(x-\frac{1}{3})+y+\frac{5}{3}=0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow 2x+y+1=0 \Rightarrow y=-1-2x$ (3) thay vào (1) ta được :

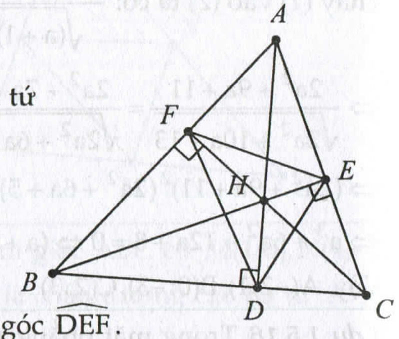
$$\left(\frac{7}{3}+x\right)(2x-2)+\left(\frac{26}{3}+2x\right)(10+4x)=0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2+86x+123=0 \Leftrightarrow x=-3; x=-\frac{41}{15}$$

- $x=-3 \Rightarrow y=5 \Rightarrow A(1;1),\ B(5;3),\ C(-3;5)$
- $x=-\frac{41}{15} \Rightarrow y=\frac{67}{15} \Rightarrow A\left(\frac{11}{15};\frac{23}{15}\right), B\left(\frac{71}{15};\frac{53}{15}\right), C\left(-\frac{41}{15};\frac{76}{15}\right).$

Ví dụ 1.5.17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $D(2;-1), E(2;2), F(-2;2)$ là chân đường cao hạ từ A, B, C. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải



Gọi $H(a;b)$ là trực tâm tam giác ABC.

Ta có tứ giác BDHF, CDHE, BCEF là các tứ giác nội tiếp nên suy ra

$$\widehat{HDF}=\widehat{HBF};\ \widehat{HDE}=\widehat{HCE};\ \widehat{HBF}=\widehat{HCE}$$

$$\Rightarrow \widehat{HDF}=\widehat{HDE}\Rightarrow AH$$

là phân giác trong góc $\widehat{EDF}$.

Tương tự, ta có BH là phân giác trong của góc $\widehat{DEF}$.

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Ta có : $\begin{cases}\dfrac{\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}}{EF}=\dfrac{\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{ED}}{ED}\\ \dfrac{\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FE}}{EF}=\dfrac{\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FD}}{FD}\end{cases}$, giải hệ này ta tìm được $a=1, b=1$ hay $H(1;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{HD}=(1;-2)$ nên phương trình $BC: x-2y-4=0$.

$\overrightarrow{HE}=(1;1)$ nên phương trình $AC: x+y-4=0$

$\overrightarrow{HF}=(-3;1)$ nên phương trình $AB: 3x-y+8=0$.

Vì $A=AB\cap AC\Rightarrow A:\begin{cases}3x-y+8=0\\x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}\Rightarrow A(-1;5)$

Tương tự, ta tìm được $B(-4;-4), C(4;0)$.

Ví dụ 1.5.18. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$. Điểm $M(0;2)$ là trung điểm cạnh BC và diện tích tam giác ABC bằng 12. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, suy ra $\overrightarrow{MI}=(1;-1)$.

Vì BC đi qua M và vuông góc với MI nên $BC: x-y+2=0$.

Tọa độ B,C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10\\x-y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+2\\x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2, y=4\\x=-2, y=0\end{array}\right.$$

Suy ra $B(2;4), C(-2;0)$ hoặc $B(-2;0), C(2;4)$

Gọi $A(a;b)$, suy ra $(a-1)^2+(b-1)^2=10$ (1).

Ta có: $d(A,BC)=\dfrac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}, BC=4\sqrt{2}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=2|a-b+2|$

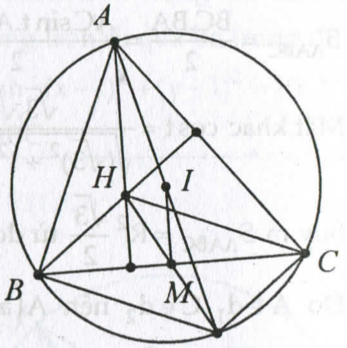
Nên ta có $|a-b+2|=6\Leftrightarrow a=b+4, a=b-8$.

- $a=b+4$ thay vào (1) ta có:
  $(b+3)^2+(b-1)^2=10\Leftrightarrow b^2+2b=0\Leftrightarrow b=0, b=-2$
- $a=b-8$ thay vào (1) ta có: $(b-9)^2+(b-1)^2=10$ vô nghiệm.

Vậy $A(0;4)$ hoặc $A(2;-2)$.

Ví dụ 1.5.19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

Lời giải.



Cách 1: Gọi $M(x;y)$ là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua O.

Ta có BH // CD, CH // BD nên tứ giác BDCH là hình bình hành nên M là trung điểm HD

Từ đó suy ra,

$\overrightarrow{AH}=-2\overrightarrow{MI}\Rightarrow\begin{cases}0=-2(-2-x)\\6=-2(-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

$\Rightarrow M(-2;3)$

Nên đường thẳng BC qua M có $\overrightarrow{AH}(0;6)$ là vtpt có phương trình là: $y-3=0$.

Gọi $C(a;3)$, do $IA=IC\Leftrightarrow 5^2+(-7)^2=(a+2)^2+(3)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4a-61=0\Leftrightarrow a=-2\pm\sqrt{65}\Rightarrow C(-2+\sqrt{65};3)$.

Cách 2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình

$$(x+2)^2+y^2=74.$$

Phương trình $AH: x=3$; do $BC\perp AH\Rightarrow BC: y=m$ ($m\neq -7$)

Tọa độ B, C là nghiệm của phương trình:

$(x+2)^2+m^2=74\Leftrightarrow x^2+4x+m^2-70=0$ (*)

Vì (*) có hai nghiệm, trong đó có ít nhất một nghiệm dương nên $|m|<\sqrt{70}$

Khi đó: $B(-2-\sqrt{74-m^2};m)$, $C(-2+\sqrt{74-m^2};m)$

Vì $BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0 \Leftrightarrow m^2+4m-21=0 \Leftrightarrow m=3$

Vậy $C(-2+\sqrt{65};3)$.

> ***Ví dụ 1.5.20.*** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$ và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d₁ tại A, cắt d₂ tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Vì ΔABC vuông tại B nên AC là đường kính của (T).

Gọi $\widehat{ASB}=\left(d_1,d_2\right)=t$ ta có $\widehat{BAC}=\widehat{ASB}=t$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Giả sử bán kính (T) là R ta có :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC.BA}{2}=\frac{AC\sin t.AC\cos t}{2}=2R^2\sin t\cos t.$$

Mặt khác $\cos t=\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{3}+1.(-1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

Suy ra $S_{\Delta ABC}=R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ từ đó có $R=1$.

Do $A\in d_1, C\in d_2$ nên $A\left(a;-a\sqrt{3}\right), C\left(c;c\sqrt{3}\right)$ thêm nữa vector chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1}(1;-\sqrt{3})$ có phương vuông góc với $\overrightarrow{AC}$ nên:

$\overrightarrow{AC}.\vec{u}_1=0 \Leftrightarrow c-a-3(c+a)=0 \Leftrightarrow c=-2a$.

Mặt khác $AC=2R=2 \Leftrightarrow \sqrt{(c-a)^2+(\sqrt{3}(c+a))^2}=2$

$\Leftrightarrow 2|a|\sqrt{3}=2$ vì $a>0$ nên $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tâm đường tròn là trung điểm của AC là:

$$I\left(\frac{a+c}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}(c-a)\right)=\left(-\frac{a}{2};-\frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right).$$

Vậy phương trình của (T) là $\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=1$.

Cách 2: Ta có d₁ tiếp xúc với (T) có đường kính là AC nên $AC\perp d_1$

Từ giả thiết ta có : $\widehat{AOx}=60^0, \widehat{BOx}=120^0 \Rightarrow \widehat{AOB}=60^0$; $\widehat{ACB}=30^0$

Nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB^2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB=1$

Vì $A\in d_2 \Rightarrow A\left(x;-\sqrt{3}x\right), x>0; OA=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.AB=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A(\dfrac{1}{\sqrt{3}};-1)$;

$$OC=2OA=\frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right).$$

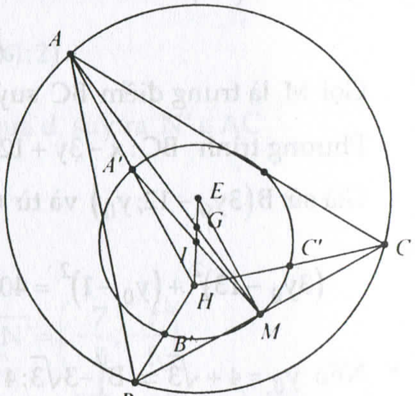
Đường tròn (T) đường kính AC có: $I\left(-\dfrac{1}{2.\sqrt{3}};-\dfrac{3}{2}\right)$, $R=\dfrac{AC}{2}=1$.

Phương trình (T): $\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=1$.

> ***Ví dụ 1.5.21.*** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm $G(2;3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Biết đường tròn đi qua ba trung điểm của ba đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình : $(x-1)^2+(y-1)^2=10$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi (C) là đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=10$, suy ra (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.



Ta có kết quả sau đây trong hình học phẳng:

"Trong tam giác, 9 điểm gồm trung điểm của ba cạnh, chân ba đường cao và ba trung điểm của các đoạn nối trực tâm với đỉnh nằm trên một đường tròn có tâm I, G, H thẳng hàng và IH = 3IG".

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC. Ta có:

Phép vị tự $V_{(G,-2)}: I\to E$, $M\to A$ và $M\in(C)$

nên ta có: $E(4;7)$ và $EA=2IM=2\sqrt{10}$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$$(x-1)^2+(y-10)^2=40.$$

🕮 BÀI TẬP

Bài 1.5.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(5;\,2)$. Phương trình đường trung trực cạnh BC, đường trung tuyến CC′ lần lượt là $x+y-6=0$ và $2x-y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

Hướng dẫn giải

Gọi $C=(c;2c+3)$ và $I=(m;6-m)$ là trung điểm của BC

Suy ra: $B=(2m-c;9-2m-2c)$.

Vì C′ là trung điểm của AB nên: $C'=\left(\dfrac{2m-c+5}{2};\dfrac{11-2m-2c}{2}\right)\in CC'$

Nên $2(\dfrac{2m-c+5}{2})-\dfrac{11-2m-2c}{2}+3=0\Rightarrow m=-\dfrac{5}{6}\Rightarrow I=(-\dfrac{5}{6};\dfrac{41}{6})$.

Phương trình $BC:3x-3y+23=0$.

Tọa độ của C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y+3=0\\3x-3y+23=0\end{cases}\Rightarrow C=\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{37}{3}\right)$

Tọa độ $B\left(-\dfrac{19}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

Bài 1.5.2. Tìm tọa độ đỉnh B, C của tam giác đều ABC, biết $A(3;-5)$ và trọng tâm $G(1;1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm BC suy ra $AG=2GM\Rightarrow M(0;4)$

Phương trình $BC:x-3y+12=0$.

Giả sử $B(3y_0-12;y_0)$ và từ GA = GB dẫn tới phương trình

$$(3y_0-13)^2+(y_0-1)^2=40\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=4+\sqrt{3}\\y_0=4-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

- Nếu $y_0=4+\sqrt{3}\Rightarrow B\left(-3\sqrt{3};4+\sqrt{3}\right)\Rightarrow C\left(3\sqrt{3};4-\sqrt{3}\right)$.
- Nếu $y_0=4-\sqrt{3}\Rightarrow B\left(3\sqrt{3};4-\sqrt{3}\right)\Rightarrow C\left(-3\sqrt{3};4+\sqrt{3}\right)$.

Bài 1.5.3. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có M(6;4) là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng AB và đường phân giác trong góc A lần lượt có phương trình $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

Gọi $d:x-2y+3=0$; $AB:x-y+1=0$.

Ta có: $A=d\cap AB\Rightarrow A:\begin{cases}x-y+1=0\\x-2y+3=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$.

$B\in AB\Rightarrow B(b;b+1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(b-1;b-1)$.

Do C đối xứng với B qua M nên ta có $C(12-b;7-b)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=(11-b;5-b)$.

Gọi $\vec{u}=(2;1)$ là VTCP của đường thẳng d.

Ta có: $\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\dfrac{\vec{u}.\overrightarrow{AB}}{AB}=\dfrac{\vec{u}.\overrightarrow{AC}}{AC}$

$$\Leftrightarrow\frac{2(b-1)+1(b-1)}{\sqrt{2(b-1)^2}}=\frac{2(11-b)+1(5-b)}{\sqrt{(11-b)^2+(5-b)^2}}\Leftrightarrow\frac{9-b}{\sqrt{2b^2-32b+146}}=\frac{b-1}{\sqrt{2(b-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le b\le 9\\\dfrac{(9-b)^2}{2b^2-32b+146}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow b=4\Rightarrow B(4;5),\ C(8;3).\ \text{Vậy } A(1;2),B(4;5),C(8;3)$$

Bài 1.5.4. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có M(6;4) là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng AB và đường phân giác ngoài góc A lần lượt có phương trình $x-y+1=0$, $2x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

Đặt $d:2x+y-4=0$

Ta có: $A=AB\cap d\Rightarrow A:\begin{cases}x-y+1=0\\2x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$.

Lấy $N(2;3)\in AB$, gọi N' đối xứng với N qua d, suy ra $N'\in AC$

Phương trình $NN':x-2y+4=0$

$NN'\cap d=I:\begin{cases}2x+y-4=0\\x-2y+4=0\end{cases}\Rightarrow I(\dfrac{4}{5};\dfrac{12}{5})$

Vì I là trung điểm NN′ nên $N'(-\dfrac{2}{5};\dfrac{9}{5})\Rightarrow\overrightarrow{AN'}=\left(-\dfrac{7}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$

Phương trình $AC:x-7y+13=0$. Từ đó suy ra $C(7c-13;c)$ và $B(b;b+1)$

Mà M là trung điểm BC nên $\begin{cases}b+7c-13=12\\c+b+1=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\c=3\end{cases}$

Vậy A(1;2), B(4;5), C(8;3).

Bài 1.5.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là : $3x+4y+10=0$ và $x-y+1=0$, điểm M(0 ; 2) thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Cho $d_1: 3x+4y+10=0$; $d_2: x-y+1=0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với d_2, Δ cắt d_2 tại I và cắt AC tại $N \Rightarrow$ N đối xứng với M qua d_2

Ta có phương trình $\Delta: x+y-2=0$.

Gọi $I=\Delta\cap d_2 \Rightarrow I: \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$.

I là trung điểm của $MN \Rightarrow N(1;1)$

AC đi qua N(1;1) và vuông góc với $d_1 \Rightarrow AC: 4x-3y-1=0$.

$A=AC\cap d_2 \Rightarrow A: \begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow A(4;5)$.

AB là đường thẳng đi qua điểm $M(0;2)$ nhận $\overrightarrow{MA}=(4;3)$ làm vec tơ chỉ phương AB: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x-4y+8=0$.

$B=AB\cap d_1 \Rightarrow B: \begin{cases} 3x-4y+8=0 \\ 3x+4y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=\dfrac{-1}{4} \end{cases} \Rightarrow B(-3;-\frac{1}{4})$.

Vì C cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$ nên C thuộc đường tròn (S) có tâm M bán kính bằng $\sqrt{2} \Rightarrow (S): x^2+(y-2)^2=2$.

Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x^2+(y-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-1}{3} \\ x^2+(\dfrac{4x-7}{3})^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-1}{3} \\ 25x^2-56x+31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{31}{25} \Rightarrow y=\dfrac{33}{25} \end{array}\right.$$

Vì d_2 là phân giác trong của góc A nên B và C nằm khác phía bờ là d_2

$\Leftrightarrow (x_B-y_B+1).(x_C-y_C+1)<0 \Leftrightarrow x_C-y_C+1>0$.

Cả hai điểm C trên đều thỏa mãn

Vậy A(4;5), $B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$, C(1;1) hoặc $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$.

Bài 1.5.6. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng 14. Hai điểm $M(2;-1), N(-2;4)$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC. Đường thẳng $\Delta: x+2y+5=0$ đi qua đỉnh B. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Vì $B\in\Delta \Rightarrow B(-2b-5;b) \Rightarrow A(2b+9;-2-b)$

Đường thẳng $MN: 5x+4y-6=0$, $MN=\sqrt{41}$

Ta có $S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\dfrac{7}{2} \Rightarrow MN.d(A,MN)=7$ (*)

Mà: $d(A,MN)=\dfrac{|6b+31|}{\sqrt{41}} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow |6b+31|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-4 \\ b=-\dfrac{19}{3} \end{array}\right.$

* $b=-4 \Rightarrow A(1;2), B(3;-4), C(-5;6)$

* $b=-\dfrac{19}{3} \Rightarrow A(-\frac{11}{3};\frac{13}{3}), B(\frac{23}{3};-\frac{19}{3}), C(-\frac{1}{3};\frac{11}{3})$.

Bài 1.5.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định tọa độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của A lên $\Delta \Rightarrow$ H là trung điểm BC.

$AH=d(A,BC)=\dfrac{9}{\sqrt{2}}$; $BC=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AH}=4\sqrt{2}$, $AB=AC=\sqrt{AH^2+\dfrac{BC^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{97}{2}}$.

Tọa độ B,C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x+1)^2+(y-4)^2=\dfrac{97}{2} \\ x-y-4=0 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $(x;y)=\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$

Vậy $B\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right), C\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right), C\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 1.5.8. Cho tam giác ABC nhọn, viết phương trình đường thẳng AC, biết tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là $A_1(-1;-2)$, $B_1(2;2), C_1(-1;2)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\widehat{CB_1x} = \widehat{AB_1C_1}$ (1)

Tứ giác AB_1HC_1 nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AB_1C_1} = \widehat{AHC_1}$ (2) và $\widehat{AHC_1} = \widehat{A_1HC}$ (3)

Tứ giác A_1HB_1C nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A_1HC} = \widehat{A_1B_1C}$ (4).

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra: $CB_1x = A_1B_1C \Rightarrow AC$ là phân giác ngoài góc B_1 của tam giác $A_1B_1C_1$.

Ta có: $A_1B_1: 4x-3y-2=0; B_1C_1: y-2=0$

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đt A_1B_1, B_1C_1

$$\frac{|4x-3y-2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = |y-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y+2=0 \\ 2x+y-6=0 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình cạnh $AC: 2x+y-6=0$.

Bài 1.5.9. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B với $A(1;-1)$, $C(3;5)$. Điểm B nằm trên đường thẳng $(d): 2x-y=0$. Viết phương trình các đường thẳng AB và BC.

Hướng dẫn giải

Ta có $B \in d \Rightarrow B(2y;y)$

Tam giác ABC cân tại $B \Rightarrow AB = BC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2y-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(2y-3)^2+(y-5)^2} \Leftrightarrow y = \frac{8}{5} \Rightarrow B\left(\frac{16}{5};\frac{8}{5}\right).$$

Phương trình cạnh $AC: 3x-y-4=0$.

Phương trình cạnh $AB: 13x-11y-24=0$.

Bài 1.5.10. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;1)$, đường cao kẻ từ B có phương trình $x-3y-7=0$ và trung tuyến kẻ từ C có phương trình $x+y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường cao $BH: x-3y-7=0$ và $AC: 3x+y-7=0$.

Vì $B \in BH \Rightarrow B(3y+7;y)$.

Tọa độ trung điểm của AB là $I\left(\frac{3y+9}{2};\frac{y+1}{2}\right)$, vì I thuộc trung tuyến kẻ từ đỉnh $C \Rightarrow \frac{3y+9}{2}+\frac{y+1}{2}+1=0 \Leftrightarrow y=-3 \Rightarrow B(-2;-3)$.

Từ đó tìm được $C(4;-5)$.

Bài 1.5.11. Cho tam giác ABC có phân giác trong $AD: x-y=0$, đường cao $CH: 2x+y+3=0$, AC đi qua $M(0;-1)$ và $AB = 2AM$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Gọi N là điểm đối xứng của M qua đường phân giác AD khi đó $N \in AB$.

Ta có $N(-1;0)$.

Cạnh AB đi qua N và vuông góc với $CH \Rightarrow AB: x-2y+1=0$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy $A(1;1)$.

Phương trình cạnh $AC: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x-y-1=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$.

Vậy $C(-\frac{1}{2};-2)$

Ta có $AM = \sqrt{(1+1)^2+1} = \sqrt{5}; AB = 2AM = 2\sqrt{5}$.

Gọi $B(2y_0-1;y_0) \in AB$.

$$AB = \sqrt{(2y_0-2)^2+(y_0-1)^2} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (y_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow y_0 = -1, y_0 = 3.$$

Với $y_0 = 3$ thì $B(5;3)$ không thõa mãn vì hai điểm B, C ở cùng phía so với đường phân giác AD.

Với $y_0 = -1$ thì $B(-3;-1)$ thỏa mãn.

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác là: $A(1;1), B(-3;-1), C(-\frac{1}{2};-2)$.

Bài 1.5.12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2;1)$, lấy điểm $B \in Ox$ có hoành độ không âm và điểm $C \in Oy$ có tung độ không âm sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm B, C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $B(x;0) \in Ox; C(0;y) \in Oy, x \geq 0, y \geq 0$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x-2;-1), \overrightarrow{AC} = (-2;y-1)$

Tam giác ABC vuông tại A suy ra

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2x-y+5 = 0 \Rightarrow y = 5-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

Diện tích tam giác ABC :

$$S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}.\sqrt{4+(y-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+1}.\sqrt{4+(5-2x-1)^2}=x^2-4x+5$$

Với $0\le x\le\frac{5}{2}\Rightarrow S=x^2-4x+5\le 5$

$\max S=5$ khi $x=0$. Vậy $B(0;0),C(0;5)$.

Bài 1.5.13. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $M(1;0),N(4;-3)$ lần lượt là trung điểm của AB, AC ; $D(2;6)$ là chân đường cao hạ từ A lên BC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MN}=(3;-3)$ và $MN//BC$ nên phương trình $BC: x+y-8=0$

Suy ra $B(b;8-b)$. Do M là trung điểm AB nên $A(2-b;b-8)$

Mặt khác: $AD\perp MN\Rightarrow\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{MN}=0\Leftrightarrow 3b-3(14-b)=0\Leftrightarrow b=7$

Vậy $A(-5;-1),B(7;1),C(13;-5)$

Bài 1.5.14. Trong mặt phẳng Oxy, Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Tìm tọa độ các điểm A,B,C biết $M(0;1)$ là trung điểm AB, điểm A có hoành độ dương.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C), tâm $I(-1;2)$, $R=2$

Gọi điểm $A(a,b)$, khi đó ta có: $(a+1)^2+(b-2)^2=4$ (1)

Ta có: $MI=\sqrt{2}$, suy ra: $IA=\sqrt{2}$ hay : $a^2+(a-1)^2=2$ (2).

Giải hệ (1), (2), ta suy ra điểm $A(2;1)$. Từ đây suy ra điểm $B(-2;1)$.

Từ dữ kiện tam giác cân tại A, kết hợp với: $MI=IA=\sqrt{2}$, nên suy ra tam giác ABC vuông cân tại A, hay chính là trung điểm BC.

Tọa độ điểm $C(0;3)$.

Bài 1.5.15. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC vuông tại A biết phương trình đường thẳng Δ chứa cạnh BC là: $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$; điểm A, B thuộc trục hoành. Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $B(1;0)$. Vì $C\in\Delta\Rightarrow C\left(a;\sqrt{3}(a-1)\right)$

A, B thuộc trục hoành và tam giác ABC vuông nên $A(a;0)$

$\overrightarrow{AB}=(a-1;0),\ \overrightarrow{AC}=\left(0;\sqrt{3}(a-1)\right)$, ABC là tam giác khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay $a\neq 1$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có $S_{ABC}=pr=\frac{1}{2}AB.AC$ suy ra $2(AB+BC+CA)=AB.AC$, mặt khác $AB=|a-1|, BC=2|a-1|, CA=\sqrt{3}|a-1|$

nên ta có $2\left(3+\sqrt{3}\right)|a-1|=\sqrt{3}(a-1)^2$ suy ra $a=1$ (loại), $a=3+2\sqrt{3}$ hoặc $a=-1-2\sqrt{3}$

Vậy có hai trường hợp xảy ra ta tìm được tọa độ trọng tâm trong hai trường hợp đó là $G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3};\frac{-2\sqrt{3}-6}{3}\right)$

Bài 1.5.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có góc $\hat{A}=120^0$, đỉnh A có tung độ dương và A thuộc đường thẳng $x+y-1=0$. Biết các cạnh AB, AC cùng tiếp xúc với đường tròn $\left(x-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2+(y-1)^2=4$, hãy lập phương trình của các cạnh AB, AC của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường tròn có tâm $I(\frac{4}{\sqrt{3}},1)$ tiếp xúc với AB, AC tại D, E.

Khi đó do $\hat{A}=120^0$ nên dễ dàng suy ra : $\widehat{IAE}=60^0$.

Xét ΔIAE vuông, có $IAE=60^0$ nên tính được : $IA=\frac{R}{\sin 60^0}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Giả sử : $A(a,1-a), a<1$ ta có : $IA^2=\left(a-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2+a^2=\frac{16}{3}\Rightarrow a=0$.

Vậy ta có: $A(0,1)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A có dạng: $ax+by-b=0$ với $a^2+b^2>0$

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (I) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow\frac{4|a|}{\sqrt{3(a^2+b^2)}}=2\Leftrightarrow 2|a|=\sqrt{3(a^2+b^2)}\Leftrightarrow a^2=3b^2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}b$$

Suy ra phương trình AB, AC là: $\pm\sqrt{3}x+y-1=0$.

Chương 2

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỔNG HỢP

§ 1. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

1. Hai đường thẳng vuông góc

Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta có các cách sau

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Cách 2: Chứng minh có một mặt phẳng (P) chứa AB và vuông góc với CD

Cách 3: Sử dụng các kết quả đã biết trong hình học phẳng

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường đi chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).

Chú ý: Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).

3. Hai mặt phẳng vuông góc

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến Δ và vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với Δ thì đường thẳng đó sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2.1.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với độ dài các cạnh AB = a, AD = b. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = c. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên các đường thẳng SB, SD.

1) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông. Tính diện tích xung quanh của hình chóp theo a, b, c
2) Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$
3) Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AHK).

Lời giải.

1) Ta có các tam giác SAB, SAD là những tam giác vuông tại A

Do $SA \perp (ABCD)$ nên suy ra $SA \perp BC$. Lại có ABCD là hình chữ nhật nên $AB \perp BC$

Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AB$ hay tam giác SBC vuông tại B

Tương tự, ta chứng minh được $CD \perp (SAD)$

nên suy ra tam giác SCD vuông tại D

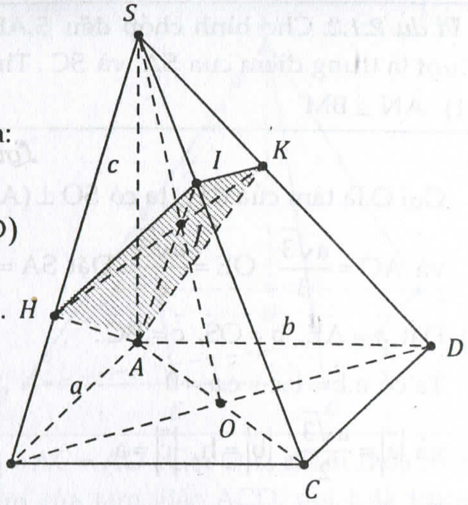
Vậy các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác vuông.

Diện tích xung quanh của hình chóp là:

$$S = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCD} + S_{\Delta SDA}$$

$$= \frac{1}{2}(SA.AB + SB.BC + SD.CD + SA.AD)$$

$$= \frac{1}{2}\left(ac + b\sqrt{a^2+c^2} + a\sqrt{c^2+b^2} + bc\right).$$



2) Ta có: $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp BC$. Mặt khác $AH \perp SB$ nên ta có $AH \perp (SBC)$

Suy ra $AH \perp SC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $AK \perp SC$. Từ đó suy ra $SC \perp (AHK)$.

3) Gọi I là giao điểm của SC với mặt phẳng (AHK), ta có thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AHK) là tứ giác AHIK.

Ta có hai tam giác AHI và AKI là hai tam giác vuông tại H và K.

Do $AI \perp SC$ nên $SI.SC = SA^2 \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{SC} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Vì $SC \perp (AHK)$ nên $HI \perp SC$, do đó hai tam giác SIH và SBC đồng dạng với nhau.

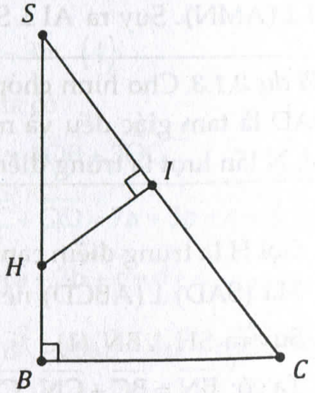
Suy ra $\frac{HI}{BC} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow HI = \frac{SI.BC}{SB} = \frac{bc^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}}$

Tương tự: $KI = \frac{SI.CD}{SD} = \frac{ac^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}}$.

Trong tam giác vuông SAB ta có:

$$AH = \frac{AB.AS}{SB} = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Tương tự: $AK = \frac{AD.SA}{AD} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

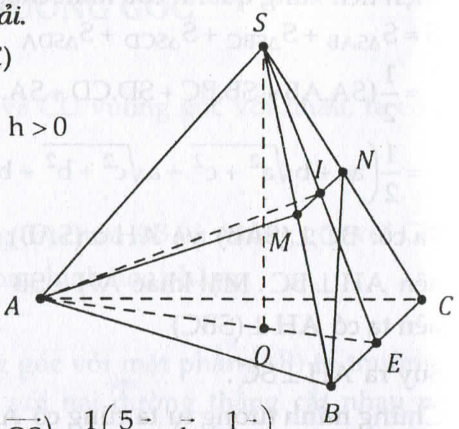


Vậy diện tích thiết diện cần tính là:

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}(HI.AH + KI.AK) = \frac{abc^3}{(a^2+b^2+c^2)\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}.$$

Ví dụ 2.1.2. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Tìm độ dài cạnh bên của hình chóp, biết:
1) $AN \perp BM$ 2) $(BMN) \perp (SAC)$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO \perp (ABC)$

và $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Đặt $SA = h,\ h > 0$

1) Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AE},\ \vec{b} = \overrightarrow{OS},\ \vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$

và $|\vec{a}| = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ |\vec{b}| = h,\ |\vec{c}| = a$

Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right)$$

Do $BN \perp AM$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{9}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \frac{3}{4}\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{9}.\frac{3a^2}{4} + h^2 - \frac{3}{4}a^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 = \frac{7}{6}a^2$$

Suy ra $SA^2 = AO^2 + OS^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{7a^2}{6} = \frac{23a^2}{12} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{69}}{6}$.

2) Gọi I là trung điểm MN, ta có $AI \perp MN$. Mặt khác $(AMN) \perp (SBC)$ nên $AI \perp (AMN)$. Suy ra $AI \perp SE \Rightarrow \Delta SAE$ là tam giác cân nên $SA = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 2.1.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Chứng minh rằng $AM \perp BN$.

Lời giải.

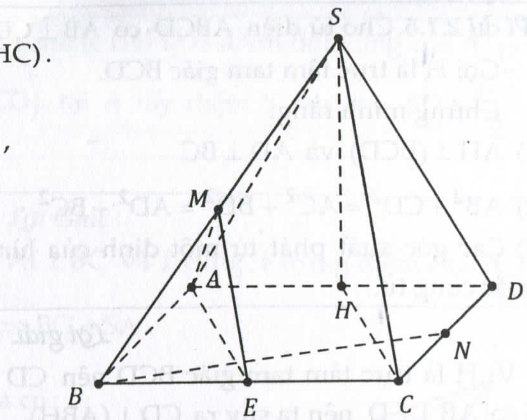
Gọi H là trung điểm cạnh AD, suy ra $SH \perp AD$.

Mà $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Suy ra $SH \perp BN$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN},\ \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}$.

Suy ra $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{CN}.\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}CD^2 = 0$.



Nên $BN \perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BN \perp (SHC)$.

Gọi E là trung điểm của BC,

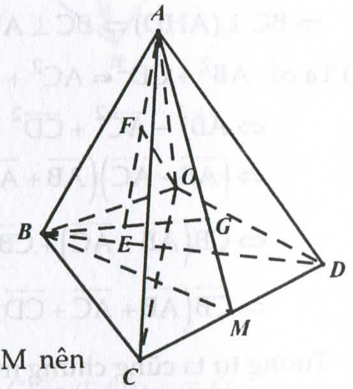
ta suy ra được $(AME) // (SHC)$,

nên ta có được $BN \perp (AME)$

Suy ra $BN \perp AM$ (đpcm).

Ví dụ 2.1.4. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$. Gọi O là điểm thỏa mãn $OA = OB = OC = OD$ và G là trọng tâm của tam giác ACD, gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE. Chứng minh OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC.

Lời giải.



Đặt $OA = OB = OC = OD = R$ (1)

và $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

Ta có $AB = AC = AD$ nên

$\Delta AOB = \Delta AOC = \Delta AOD\ (c - c - c)$

suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{AOD}$ (2),

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{d}$ (3).

Gọi M là trung điểm của CD và do $AG = 2GM$ nên

$$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b} \quad (4)$$

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AE, BG ta có

$$12\overrightarrow{OF} = 6\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}\right) = 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OG}$$
$$= 6\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 7\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = \left(7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)\left(\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)$

$$= 7\vec{a}^2 - 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 18\vec{a}\vec{b} + 8\vec{a}\vec{c} + 8\vec{a}\vec{d} + 2\vec{c}\vec{d}.$$

Theo (3) ta có $36\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 2\vec{d}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{OF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{AC} = 0$ hay $OF \perp BG \Leftrightarrow OD \perp AC$.

Ví dụ 2.1.5. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$.

Gọi H là trực tâm tam giác BCD.

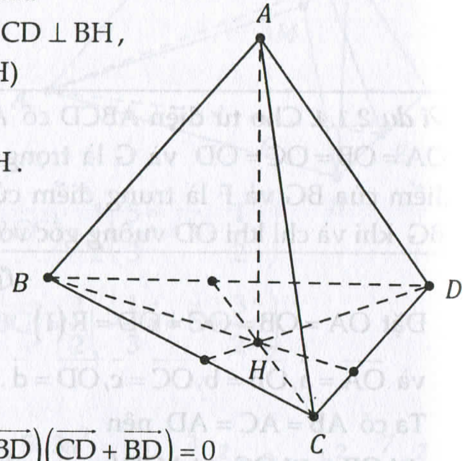
Chứng minh rằng:

1) $AH \perp (BCD)$ và $AD \perp BC$

2) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

3) Các góc xuất phát từ một đỉnh của hình chóp cùng nhọn, cùng vuông hoặc cùng tù.

Lời giải.



1) Vì H là trực tâm tam giác BCD nên $CD \perp BH$, lại có $AB \perp CD$ nên ta suy ra $CD \perp (ABH)$

Dẫn tới $CD \perp AH$.

Chứng minh tương tự, ta có: $BD \perp AH$.

Từ đó suy ra $AH \perp (BCD)$

Ta có: $AH \perp BC$, $DH \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp AD$.

2) Ta có: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được cho hai đẳng thức còn lại.

3) Xét tại góc A. Ta có:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}; \quad \cos\widehat{CAD} = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC.AD};$$

$$\cos\widehat{DAB} = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2.AD.AB}$$

Mặt khác, ta có: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

Nên $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$; $AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$

Do đó: $AB.AC.\cos\widehat{BAC} = AC.AD.\cos\widehat{CAD} = AD.AB.\cos\widehat{DAB}$

Từ đó ta suy ra được $\cos\widehat{BAC}$, $\cos\widehat{CAD}$, $\cos\widehat{DAB}$ cùng dương, cùng âm hoặc cùng triệt tiêu.

Từ đó ta suy ra đpcm.

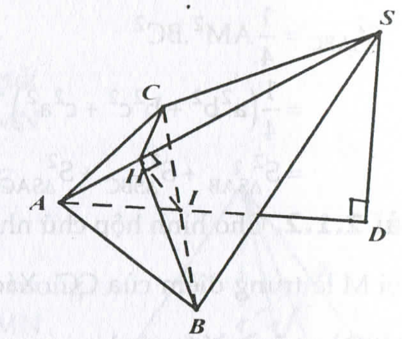
Ví dụ 2.1.6. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d \perp (ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời Giải.

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.



Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có :

$\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HICB) \Rightarrow SA \perp BH$.

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AD}$.

Mà $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$,

$$SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Suy ra } IH = \frac{AI.SD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2}.$$

Suy ra $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$. Vậy $BH \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$.

BÀI TẬP

Bài 2.1.1. Cho hình chóp S.ABC có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC).

1) Chứng minh rằng H là trực tậm của tam giác ABC

2) Tính SH theo a, b, c

3) Chứng minh rằng: $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta SAB} + S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAC}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $SH \perp BC$ nên ta suy ra $BC \perp (SAH) \Rightarrow AH \perp BC$.

Tương tự ta cũng có $AB \perp CH$, hay H là trực tâm của tam giác ABC.

2) Ta có: $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Suy ra $SH=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

3) Ta có: $SM^2=SA^2+AM^2$

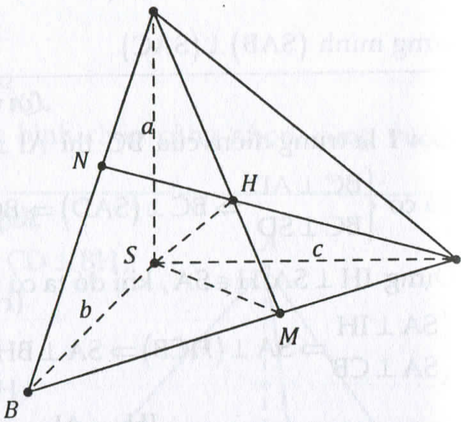
$=a^2+\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}$

Suy ra

$S^2_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}AM^2.BC^2$

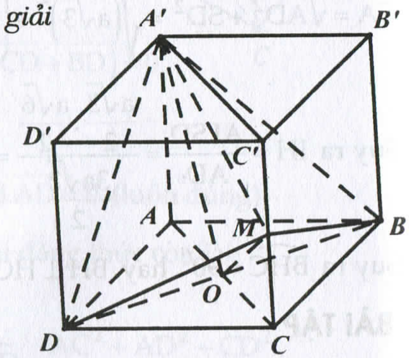
$=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.

$=S^2_{\Delta SAB}+S^2_{\Delta SBC}+S^2_{\Delta SAC}$



Bài 2.1.2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=AD=a, AA'=b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Ta có $BD=(A'BD)\cap(MBD)$,

$\begin{cases}AC\perp BD\\ AA'\perp BD\end{cases}\Rightarrow(ACC'A')\perp BD$

Vậy $\begin{cases}(ACC'A')\perp BD\\ (ACC'A')\cap(A'BD)=OA'\\ (ACC'A')\cap(MBD)=OM\end{cases}$

do đó góc giữa hai đường thẳng OM, OA' chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM=\frac{AC'}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}}{2}=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

$OA'^2=AO^2+AA'^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+b^2=\frac{a^2}{2}+b^2$,

$MA'^2=A'C'^2+MC'^2=a^2+b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2+\frac{5b^2}{4}$

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau

$\Leftrightarrow \Delta OMA'$ vuông tại O $\Leftrightarrow OM^2+OA'^2=MA'^2$

$\Leftrightarrow \frac{2a^2+b^2}{4}+\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)=\left(a^2+\frac{5b^2}{4}\right)\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1$

$(A'BD)\perp(MBD)$ khi $\frac{a}{b}=1$ (Khi đó ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương).

Bài 2.1.3. Cho hình chóp đều S.ABC, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$.

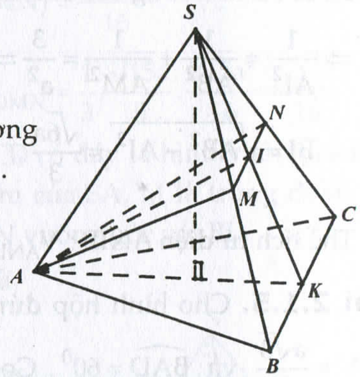
Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm của BC và $I=SK\cap MN$.

Từ giả thiết ta có $MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}, MN//BC$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB=\Delta SAC\Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng $AM=AN\Rightarrow\Delta AMN$ cân tại $A\Rightarrow AI\perp MN$.



Mặt khác $\begin{cases}(SBC)\perp(AMN)\\ (SBC)\cap(AMN)=MN\\ AI\subset(AMN)\\ AI\perp MN\end{cases}$

$\Rightarrow AI\perp(SBC)\Rightarrow AI\perp SK\Rightarrow\Delta SAK$ cân tại $A\Rightarrow SA=AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

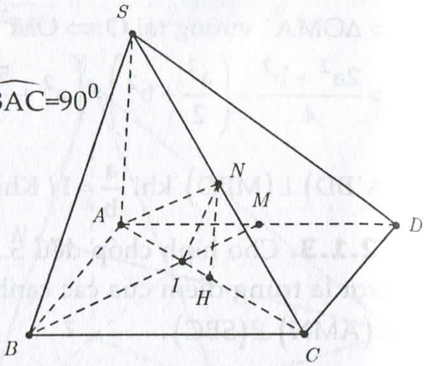
Ta có: $SK^2=SB^2-BK^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow AI=\sqrt{SA^2-SI^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{SK}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $S_{AMN}=\frac{1}{2}MN.AI=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Bài 2.1.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=\sqrt{2}a$, $SA=a$ và vuông góc với mp(ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC, Gọi I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh mp(SAC) vuông góc với mp(SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Hướng dẫn giải



Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \Delta ABM\sim\Delta ABM$

$\Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{BCA}\Rightarrow \widehat{ABM}+\widehat{BAC}=\widehat{BCA}+\widehat{BAC}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB}=90^0\Rightarrow BM\perp AC$ (1)

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$MB\perp(SAC)\Rightarrow(SMB)\perp(SAC)$.

Gọi H là trung điểm của AC

$\Rightarrow NH//SA\Rightarrow NH\perp(ABI)$ và $NH=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$.

Ta có AI là đường cao của ΔABM vuông tại A

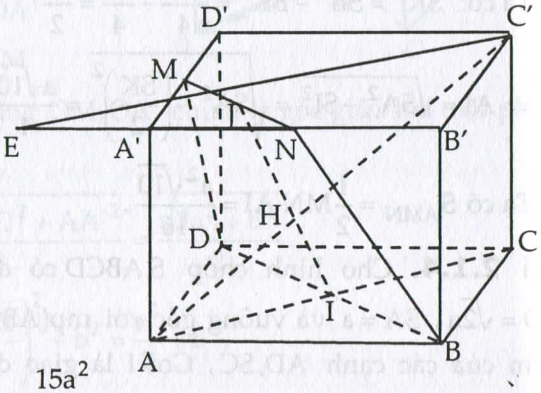
$\Rightarrow \frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow AI=\frac{\sqrt{3}a}{3}$

$BI=\sqrt{AB^2-AI^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Thể tích tứ diện ANIB: $V_{ANIB}=\frac{1}{3}NH.\frac{1}{2}.IA.IB=\frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}a}{3}.\frac{\sqrt{6}a}{3}=\frac{\sqrt{2}a^3}{36}$.

Bài 2.1.5. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh $AB=AD=a$, $AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của A'D' và A'B'. Chứng minh $AC'\perp(BDMN)$ và tính thể tích khối chóp A.BDMN.

Hướng dẫn giải



Theo giả thiết ta có:

$\begin{cases}BD\perp AC\\DB\perp CC'\end{cases}\Rightarrow BD\perp AC'$ (1)

Gọi $E\in A'B'$ sao cho A' là trung điểm của EN.

Ta có: $AE//BN, AE=BN=a$.

Theo giả thiết ta có ABD đều

nên suy ra $AC=\sqrt{3}a$.

$AC'^2=AC^2+CC'^2=3a^2+\frac{3a^2}{4}=\frac{15a^2}{4}$.

$EC'^2=B'E^2+B'C'^2-2B'E'.B'C'.\cos120^0=\frac{19a^2}{4}$

$AE^2+AC'^2=EC'^2\Rightarrow AE\perp AC'\Rightarrow BN\perp AC'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $AC'\perp(BDMN)$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BD, MN và $H=AC'\cap IJ$

Ta có AH là đường cao của hình chóp A.BDMN

Tứ giác HICC' nội tiếp $\Rightarrow AH.AC'=AI.AC\Rightarrow AH=\frac{AC^2}{2AC'}=\frac{\sqrt{15}a}{5}$.

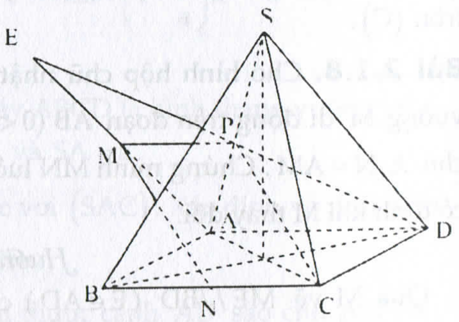
Tứ giác BDMN là hình thang cân ta có : $IJ=\sqrt{BN^2-\left(\frac{BD-MN}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}a}{4}$.

Diện tích hình thang BDMN : $S=\frac{1}{2}IJ(BD+MN)=\frac{\sqrt{15}a^2}{16}$.

Thể tích khối chóp A.BDMN : $V=\frac{1}{3}AH.S_{BDMN}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{15}a}{5}.\frac{\sqrt{15}a^2}{16}=\frac{a^3}{16}$.

Bài 2.1.6. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD.

Hướng dẫn giải



Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của tam giác EAD

$\Rightarrow MP//AD\Rightarrow MP//NC$.

Và $MN=\frac{1}{2}AD=NC$.

Suy ra MNCP là hình bình hành

$\Rightarrow MN//CP\Rightarrow MN//(SAC)$.

Ta dễ chứng minh được $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp MN$

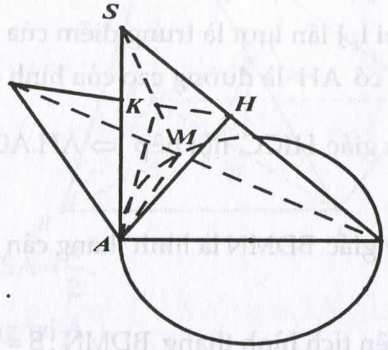
Bài 2.1.7. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α), một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A; trên d lấy điểm $S\neq A$ và trên (C) lấy điểm M (M khác A, B).

1) Chứng minh $MB\perp(SAM)$.

2) Dựng AH vuông góc với SB tại H; AK vuông góc với SM tại K. Chứng minh $AK\perp(SBM), SB\perp(AHM)$

3) Gọi I là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Hướng dẫn giải



1) Ta có $\begin{cases} SA \perp (\alpha) \\ MB \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow SA \perp MB$ (1)

Lại có $MB \perp MA$ (2)

(t/c góc chắn nửa đường tròn)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MB \perp (SAM)$.

2) Ta có $AK \perp SM$,

$MB \perp (SAM), AK \subset (SAM) \Rightarrow MB \perp AK$.

Suy ra $AK \perp (SBM)$.

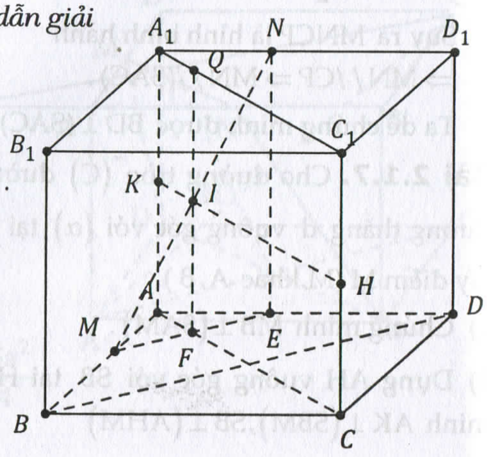
Tương tự $\begin{cases} AK \perp (SBM) \\ SB \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow AK \perp SB$, lại có $AH \perp SB$ suy ra $SB \perp (AHK)$.

3) Ta có $\begin{cases} AI \subset (AHK) \\ SB \perp (AHK) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SB$ (3) và $\begin{cases} AI \subset (\alpha) \\ SA \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AI \perp SA$ (4).

Từ (3), (4) suy ra $AI \perp (SAB) \Rightarrow AI \perp AB$ hay AI là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Bài 2.1.8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình vuông. M di động trên đoạn AB $(0 < AM < AB)$. Lấy N thuộc cạnh A_1D_1 sao cho $A_1N = AM$. Chứng minh MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Hướng dẫn giải



Qua M vẽ $ME//BD$ $(E \in AD)$ cắt AC tại F, ta có F là trung điểm của ME và $ME \perp AC$

Do $AM = A_1N \Rightarrow AE = A_1N \Rightarrow NE//AA_1$.

Gọi I là trung điểm của MN, vẽ FI cắt A_1C_1 tại Q, ta có I là trung điểm đoạn FQ

Gọi K, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA_1, CC_1 suy ra K, I, H thẳng hàng.

Mặt khác $KH \perp FQ$, $HK//AC \Rightarrow HK \perp ME$.

Suy ra $KH \perp (MEN) \Rightarrow KH \perp MN$.

Vậy khi M thay đổi thì đường thẳng MN luôn vuông góc và cắt đường thẳng cố định HK.

Bài 2.1.9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trên các cạnh DC và BB′ lấy các điểm M và N sao cho $MD = NB = x$ $(0 \le x \le a)$. Chứng minh rằng:

1) $AC' \perp B'D'$ 2) $AC' \perp MN$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

1) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{B'D'} = \vec{c} - \vec{b}$ nên

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D'} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) + \vec{c}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC' \perp B'D'.$$

2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) - \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}\right)$

$$= \left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left[\left(\vec{b} + \frac{x}{a}\vec{a}\right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a}\vec{b}\right) = \frac{x}{a}\vec{a} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b} - \vec{c}\right]$

$$= \frac{x}{a}\vec{a}^{\,2} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\vec{b}^{\,2} - \vec{c}^{\,2} = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 - a^2 = 0.$$

Vậy $AC' \perp MN$.

Bài 2.1.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$.

1) (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.

2) Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = x$. Mặt phẳng (β) đi qua MN và vuông góc với (SAD). Xác định và tính diện tích thiết diện của hịnh chóp cắt bởi (β).

Hướng dẫn giải

1) Gọi E là trung điểm của cạnh AB và O là giao điểm của AC và DE thì ADCE là hình vuông có tâm là O.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OD$, thêm nữa $OD \perp AC \Rightarrow OD \perp (SAC)$.

Từ đó ta có $OD \perp (SAC) \Rightarrow (SDO) \perp (SAC)$.

Vậy (SDO) chính là mặt phẳng (α).

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là tam giác SDE.

Ta có $SO=\sqrt{OA^2+AS^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+a^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$BC=DE=a\sqrt{2}$,

do $DE\perp(SAC)\Rightarrow DE\perp AO\Rightarrow S_{SDE}=\frac{1}{2}SO.DE=\frac{1}{2}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

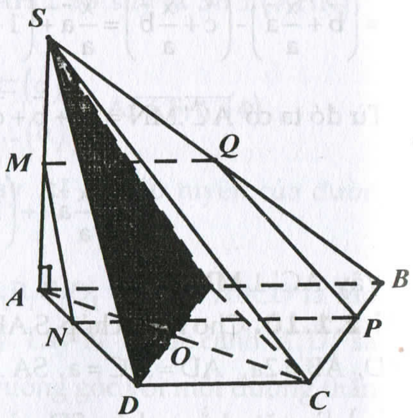
2) Ta có $\begin{cases}AB\perp(SAD)\\(\beta)\perp(SAD)\end{cases}\Rightarrow AB//(\beta)$.

Vậy $\begin{cases}M\in(\beta)\cap(SAB)\\AB\subset(SAB)\\AB//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\beta)\cap(SAB)=MQ//AB, Q\in SB$.

Tương tự, $\begin{cases}N\in(\beta)\cap(ABCD)\\AB\subset(ABCD)\\AB//(\beta)\end{cases}$

$\Rightarrow(\beta)\cap(ABCD)=NP//AB, P\in BC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



Do $\begin{cases}NP//AB\\MQ//AB\end{cases}\Rightarrow NP//MQ\ (1)$

Lại có $\begin{cases}MN\subset(SAD)\\AB\perp(SAD)\end{cases}\Rightarrow AB\perp MN\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M và N.

Do đó $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(NP+MQ)MN$.

$MN=\sqrt{AM^2+AN^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+x^2}=\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2},\ MQ=\frac{1}{2}AB=a$

$\frac{NP}{AB}=\frac{DN}{DA}\Rightarrow NP=\frac{AB.DN}{DA}=\frac{2a(a-x)}{a}=2(a-x)$

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(2(a-x)+a)\frac{\sqrt{a^2+4x^2}}{2}=\frac{(3a-2x)\sqrt{a^2+4x^2}}{4}$.

§ 2. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b ta có các cách sau

Cách 1: Tìm góc giữa hai đường thẳng a, b bằng cách chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng). Từ O dựng các đường thẳng a', b' lần lượt song song (có thể trùng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với a và b. Góc giữa hai đường thẳng a', b' chính là góc giữa hai đường thẳng a và b.

Chú ý: Để tính góc này ta thường sử dụng định lí côsin trong tam giác:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Cách 2: Tìm hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ của hai đường thẳng a, b

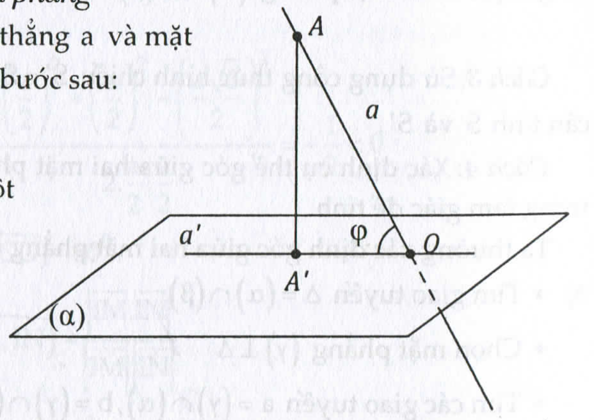
Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b xác định bởi $\cos(a,b)=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Chú ý: Để tính $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$, $\left|\overrightarrow{u_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{u_2}\right|$ ta chọn ba vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng mà có thể tính được độ dài và góc giữa chúng, sau đó biểu thị các vec tơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ qua các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ rồi thực hiện các tính toán.

2. Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A\in a$ xuống (α)
- Góc $\widehat{AOA'}=\varphi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).



Lưu ý:

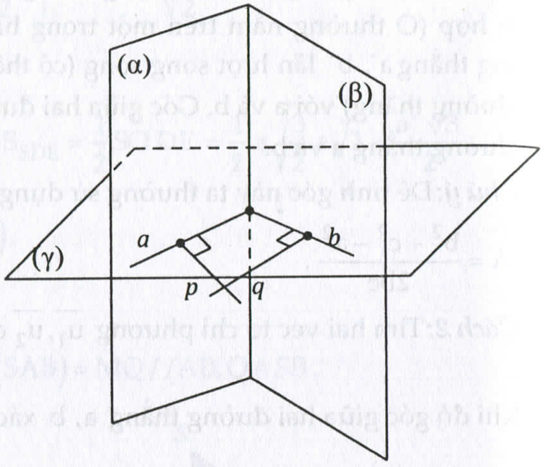
- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b\perp(\alpha)$ khi đó $AA'//b$.
- Để tính góc φ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc φ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a

và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\varphi=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{n}\right|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).

3. *Góc giữa hai mặt phẳng*

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

Cách 1: Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β).



Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\begin{cases} a\perp(\alpha)\\ b\perp(\beta)\end{cases}\Rightarrow\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)}=\widehat{(a,b)}.$$

Cách 2: Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ có giá lần lượt vuông góc với (α) và (β) khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) xác định bởi $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}\right|}$.

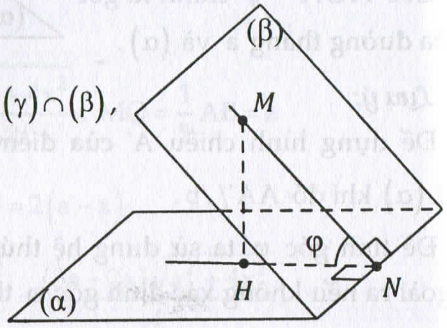
Cách 3: Sử dụng công thức hình chiếu $S'=S\cos\varphi$, từ đó để tính $\cos\varphi$ thì ta cần tính S và S'.

Cách 4: Xác định cụ thể góc giữa hai mặt phẳng rồi sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính.

Ta thường xác định góc giữa hai mặt phẳng theo một trong hai cách sau:

a)
- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$
- Chọn mặt phẳng $(\gamma)\perp\Delta$
- Tìm các giao tuyến $a=(\gamma)\cap(\alpha), b=(\gamma)\cap(\beta)$, khi đó: $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)}=\widehat{(a,b)}$.

b)
- Tìm giao tuyến $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$
- Lấy $M\in(\beta)$.



Dựng hình chiếu H của M trên (α)

- Dựng $HN\perp\Delta\Rightarrow MN\perp\Delta$.

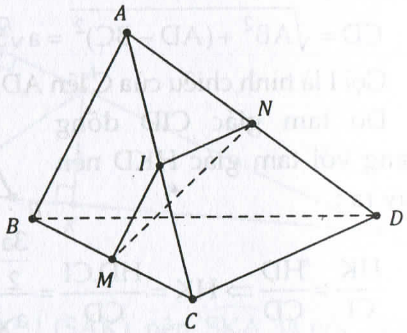
Phương pháp này có nghĩa là tìm hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ và vuông góc với giao tuyến Δ tại một điểm trên giao tuyến.

Chú ý: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có đường cao SH. Để xác định góc giữa mặt phẳng (SA_iA_j) ($i,j\in\{1,2,...,n\}$; $i\neq j$) với mặt đáy ta làm như sau:

- Từ H vẽ $HK\perp A_iA_j$, $K\in A_iA_j$
- Khi đó $\widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SA_iA_j) và mặt đáy.

> ***Ví dụ 2.2.1.*** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB=CD=a, MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.



Cách 1: Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có: $\begin{cases} IM//AB\\ IN//CD\end{cases}\Rightarrow\widehat{(AB,CD)}=\widehat{(IM,IN)}$.

Đặt $\widehat{MIN}=\alpha$

Xét tam giác IMN có

$$IM=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}, IN=\frac{CD}{2}=\frac{a}{2}, MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Theo định lí côsin, ta có

$$\cos\alpha=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2IM.IN}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}\frac{a}{2}}=-\frac{1}{2}<0$$

$\Rightarrow\widehat{MIN}=120^0$ suy ra $\widehat{(AB,CD)}=60^0$.

Cách 2: $\cos\widehat{(AB,CD)}=\cos\widehat{(IM,IN)}=\dfrac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}$

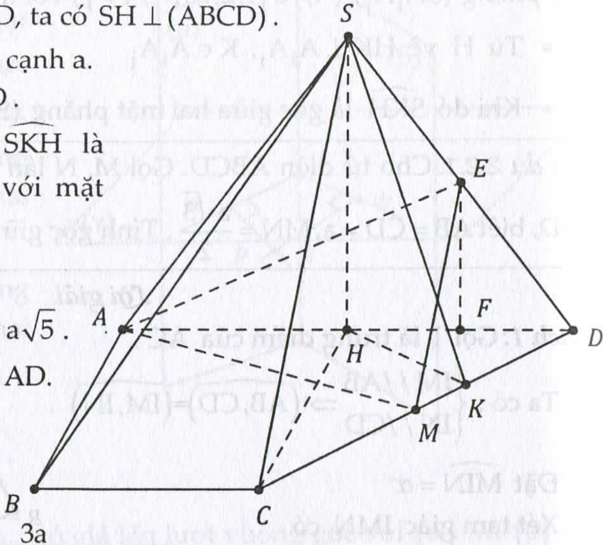
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\Rightarrow\overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{IN}-\overrightarrow{IM}\right)^2=IM^2+IN^2-2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM};$$

$$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2}=-\frac{a^2}{8};\ \cos\widehat{(AB,CD)}=\left|\cos\widehat{(IM,IN)}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}\right|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|\left|\overrightarrow{IN}\right|}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\widehat{(AB,CD)}=60^0$.

Ví dụ 2.2.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 3a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm cạnh AD. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60⁰. Gọi M là trung điểm đoạn CD. Tính cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và SC.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AD, ta có $SH \perp (ABCD)$.

Ta có ABCH là hình vuông cạnh a.

Từ H vẽ $HK \perp CD$, $K \in CD$.

Suy ra $CD \perp (SHK)$, nên $\widehat{SKH}$ là góc giữa mặt phẳng (SCD) với mặt đáy, do đó $\widehat{SKH} = 60^0$.

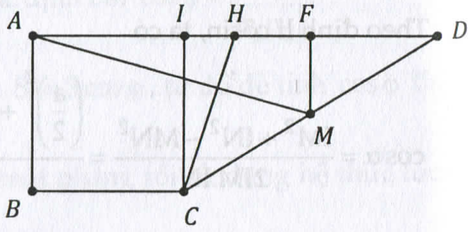
Ta có:

$$CD = \sqrt{AB^2 + (AD - BC)^2} = a\sqrt{5}.$$

Gọi I là hình chiếu của C lên AD.

Do tam giác CID đồng dạng với tam giác HKD nên suy ra :

$$\frac{HK}{CI} = \frac{HD}{CD} \Rightarrow HK = \frac{HD.CI}{CD} = \frac{\frac{3a}{2}.a}{a\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$



Do đó $SH = HK\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{10}$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SD và HD.

Ta có ME / /SC, EF / /SH ,

$$EF = \frac{1}{2}SH = \frac{3a\sqrt{15}}{20} \text{ và } (\widehat{AM, SC}) = (\widehat{AM, ME}).$$

Gọi I là hình chiếu của C lên AD, ta có:

$$IH = AH - AI = AH - BC = \frac{a}{2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Nên $ME = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{185}}{20}$, $AF = \frac{3}{4}AD = \frac{9a}{4}$.

Suy ra $AE^2 = AF^2 + FE^2 = \frac{27a^2}{5}$.

Ta có: $MF \perp AD \Rightarrow MF = \frac{1}{2}CI = \frac{a}{2}$, suy ra $AM = \sqrt{AF^2 + MF^2} = \frac{a\sqrt{565}}{10}$.

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác AME, ta có:

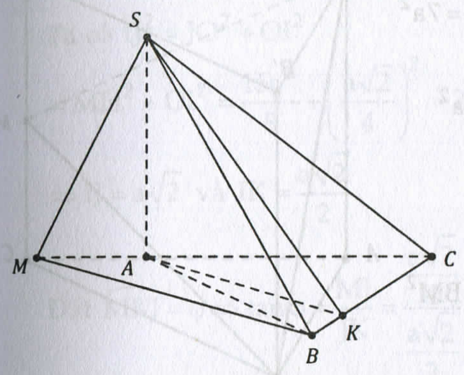
$$\cos\widehat{AME} = \frac{AM^2 + ME^2 - AE^2}{2.MA.ME} = \frac{57}{4\sqrt{4181}}$$

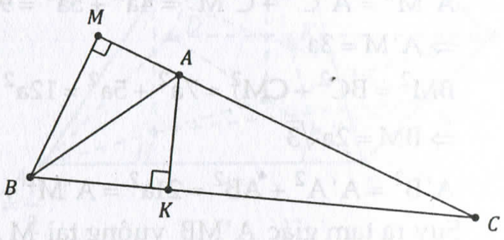
Vậy $\cos(\widehat{AM, SC}) = \frac{57}{4\sqrt{4181}}$.

Ví dụ 2.2.3. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, SA = a , AB = a, AC = 2a, $\widehat{BAC} = 120^0$. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng:

1) (ABC) và (SBC) 2) (SAC) và (SBC).

Lời giải.





1) Gọi K là hình chiếu của A lên BC, ta có $BC \perp (SAK)$ nên $\widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$.

$AK.BC = AB.AC.\sin 120^0 \ (= 2S_{\Delta ABC})$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{70}}{7}.$$

Suy ra $\cos\widehat{SKA} = \frac{AK}{SK} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

2) Gọi M là hình chiếu của B lên AC, ta có $BM \perp (SAC)$

Suy ra tam giác SMC là hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAC)

Theo công thức hình chiếu, ta có: $\cos\varphi = \frac{S_{\Delta SMC}}{S_{\Delta SBC}}$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

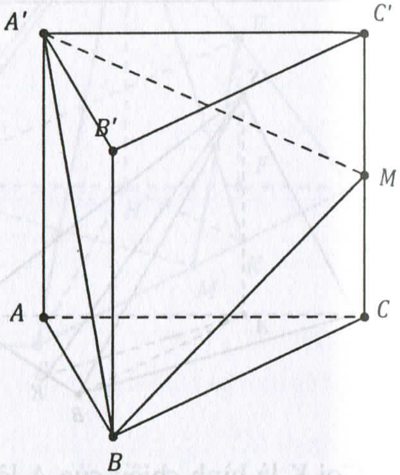
Ta có : $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SK.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{70}}{7}.a\sqrt{7} = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}$.

Do $\widehat{BAM}=60^0 \Rightarrow AM = AB\cos 60^0=\frac{a}{2}\Rightarrow S_{\Delta SMC}=\frac{1}{2}SA.MC=\frac{3a^2}{4}$

Vậy $\cos\varphi=\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

> ***Ví dụ 2.2.4.*** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a; AC=2a; AA'=2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC}=120^o$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (BMA') với (ABC).

Lời giải.



Ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120^0=7a^2$

$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$

$A'M^2=A'C'^2+C'M^2=4a^2+5a^2=9a^2$

$\Rightarrow A'M=3a$

$BM^2=BC^2+CM^2=7a^2+5a^2=12a^2$

$\Rightarrow BM=2a\sqrt{3}$

$A'B^2=A'A^2+AB^2=21a^2=A'M^2+BM^2$

Suy ra tam giác $A'MB$ vuông tại M,

suy ra $S_{\Delta A'MB}=\frac{1}{2}MA'.MB=3a^2\sqrt{3}$

Ta có tam giác ABC là hình chiếu của tam giác BMA' lên mặt phẳng (ABC), nên áp dụng công thức hình chiếu ta có:

$\cos\varphi=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMA'}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3a^2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ với $\varphi=\left(\widehat{(BMA'),(ABC)}\right)$.

> ***Ví dụ 2.2.5.*** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, O là tâm của đáy, $SO\perp(ABCD)$; M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD. Biết góc giữa MN với $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời Giải

Cách 1: Kẻ $MH//SO, H\in OA$.

Do $\begin{cases} MH//SO \\ SO\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow MH\perp(ABCD)$

suy ra NH là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$

$\Rightarrow\widehat{MNH}$ chính là góc giữa đường thẳng MN với $(ABCD)$.

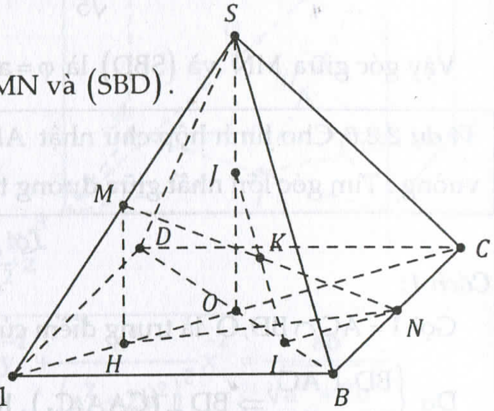
Ta có $HB^2=OH^2+OB^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{2}=\frac{5a^2}{8}\Rightarrow NH=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Xét ΔMHN có $MN=\frac{HN}{\cos 60^0}=\frac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $MH=NH\tan 60^0=\frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì $MJ//IN$ và $MJ=IN$.

Gọi $K=IJ\cap MN\Rightarrow JK=\frac{1}{2}IJ$

và $MJ\perp(SBD)\Rightarrow\widehat{MKJ}$ là góc giữa MN và (SBD).



Ta có $IJ^2=JO^2+OI^2$

$=MH^2+OI^2=\frac{15a^2}{8}+\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2=2a^2$

$\Rightarrow IJ=a\sqrt{2}$ và $IK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $\widehat{MKJ}=\varphi\Rightarrow\tan\varphi=\frac{MJ}{JK}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi=\arctan\frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $MN^2=\frac{1}{4}\left(SO^2+AC^2+OB^2\right)=\frac{1}{4}\left(SO^2+\frac{5a^2}{2}\right)\Rightarrow MN=\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}$.

Ta có φ là góc giữa MN và (SBD) nên $\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}$ ($\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (SBD)).

Do $\begin{cases} AC\perp SO \\ AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)$ nên chọn $\vec{n}=\overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$$\sin\varphi=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}}=\frac{2a}{\sqrt{2SO^2+5a^2}}\quad(*)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và (ABCD) bằng 60^0 nên

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{SO}\right|}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2+\frac{5a^2}{2}}.SO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 8SO^2=3\left(2SO^2+5a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2SO^2=15a^2.$$

Thay vào (*) suy ra $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 2.2.6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình vuông . Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1).

Lời giải

Cách 1:

Gọi $I=AC\cap BD$, O là trung điểm của BD_1 thì $O\in(CAA_1C_1)$.

Do $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp CC_1\end{cases}\Rightarrow BD\perp(CAA_1C_1)$, hạ $OH\perp IC_1, H\in IC_1$ thì $OH\perp(BDC_1)$,

vậy góc giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1) là góc $\widehat{OBH}=\alpha$.

Đặt $AB=AD=a, AA_1=b$ thì

$$BD_1=\sqrt{AB^2+AB^2+DD_1^2}=\sqrt{2a^2+b^2}\Rightarrow OB=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}.$$

Dễ thấy $HO=\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{OH}{OB}=\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+5}}$

Do $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge 2\Rightarrow\sin\alpha\le\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha\le\arcsin\frac{1}{3}$ (Do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

Vậy $\max\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ khi $a=b$.

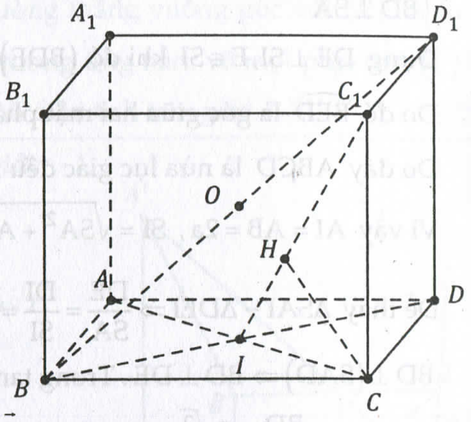
Cách 2: Đặt $\overrightarrow{CB}=\vec{x},\overrightarrow{CD}=\vec{y},\overrightarrow{CC_1}=\vec{z}\Rightarrow\left|\vec{x}\right|=\left|\vec{y}\right|=a,\left|\vec{z}\right|=b$

$$\overrightarrow{BD_1}=-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z},\ \left|\overrightarrow{BD_1}\right|=\sqrt{\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2}=\sqrt{2a^2+b^2}$$

Gọi H là hình chiếu của C trên C_1I thì $CH\perp C_1I$

và $CH\perp BD\Rightarrow CH\perp(BDC_1)$.

Ta có $\frac{C_1H}{IH}=\frac{C_1H.C_1I}{IH.IC_1}=\frac{CC_1^2}{CI^2}=\frac{b^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{2b^2}{a^2}$ nên



$$\overrightarrow{CH}=\frac{1}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CC_1}+\frac{\frac{2b^2}{a^2}}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CI}$$

$$=\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}.2\overrightarrow{CI}$$

$$=\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CI}$$

$$=\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right|=\sqrt{\frac{b^4}{\left(a^2+2b^2\right)^2}\vec{x}^2+\frac{b^4}{\left(a^2+2b^2\right)^2}\vec{y}^2+\frac{a^4}{\left(a^2+2b^2\right)^2}\vec{x}^2}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

Vậy $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CH}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{\left|\left(-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)\left(\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}\right)\right|}{\sqrt{2a^2+b^2}\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$

$$=\frac{ab}{\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)}}.$$

Theo BĐT Côsi ta có $\frac{ab}{\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)}}\le\frac{ab}{\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^4}\,3\sqrt[3]{b^2a^4}}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\sin\alpha\le\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha\le\arcsin\frac{1}{3}\Rightarrow\max\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ khi $a=b$.

Ví dụ 2.2.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB=2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$.

1) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải.

1) Gọi $I = AD \cap BC$ thì $SI = (SAD) \cap (SBC)$.

$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Dựng $DE \perp SI, E \in SI$ khi đó $(BDE) \perp SI$.

Do đó $\widehat{BED}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Do đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 60^0 \Rightarrow \Delta IBA$ đều.

Vì vậy $AI = AB = 2a$, $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

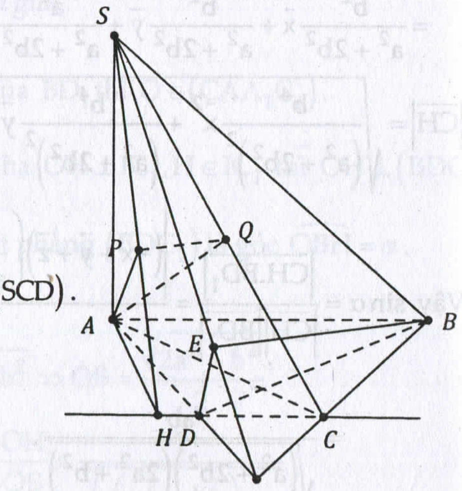
Dễ thấy $\Delta SAI \sim \Delta DEI \Rightarrow \frac{DE}{SA} = \frac{DI}{SI} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{SA}{\sqrt{7}} = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp DE$. Trong tam giác vuông BDE ta có :

$\tan\widehat{BED} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\frac{3}{7}}} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow \widehat{BED} = \arctan\sqrt{7}$

Vậy $((SAD),(SBC)) = \arctan\sqrt{7}$



2) Dựng $AP \perp SH, P \in SH$.

Do $CD \perp (SAH) \Rightarrow AP \perp CD \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Tương tự, dựng $AQ \perp SC, Q \in SC$ thì $AQ \perp (SBC)$.

Do đó $\widehat{PAQ} = ((SBC),(SCD))$.

Trong tam giác SAH ta có :

$$\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Dễ thấy ΔSAC vuông cân tại A nên $AQ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

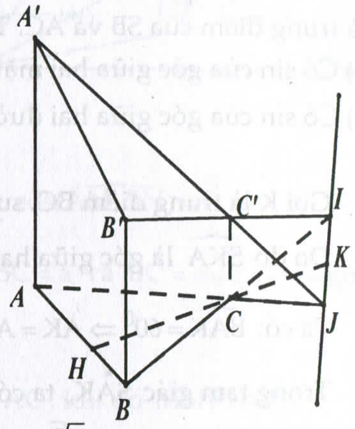
Do $AP \perp (SCD) \Rightarrow AP \perp PQ$.

Trong ΔAPQ có $\cos\widehat{APQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{APQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

Vậy $((SBC),(SCD)) = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 2.2.8. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A,B,C lần lượt lấy các điểm A',B',C' tương ứng nằm về một phía của (P) sao cho $AA_1 = 3a, BB_1 = 2a, CC_1 = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Lời giải.



Ta có $S_{ABC} = \frac{3a^2}{2}$.

Vì $CH \perp AB, CH = a, AH = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAC} = 45^0$

Gọi $I = B'C' \cap BC, J = A'C' \cap AC$.

Ta có $CC' = \frac{1}{2}BB' \Rightarrow BC = CI$

$CC' = \frac{1}{3}AA' \Rightarrow CJ = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔBCH ta có $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 5a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

Mặt khác $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.AB\cos C$

$\Rightarrow \cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = -\frac{1}{10}$.

Xét ΔICJ ta có $IJ^2 = CI^2 + CJ^2 - 2CI.CJ\cos\widehat{ICJ} = \frac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của ΔICK, do $CC' \perp (ICJ)$ nên $C'K \perp IJ$.

Vậy $\widehat{C'KC}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ nên

$S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC}$. Ta có $S_{ICJ} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{3a^2}{4}$

Mặt khác $S_{ICJ} = \frac{1}{2}IJ.CK \Rightarrow CK = \frac{2S_{ICJ}}{IJ} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{\sqrt{26}a}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{26}}$.

Xét $\Delta C'CK$ ta có $\tan\widehat{C'KC} = \frac{CC'}{CK} = \frac{a}{\frac{3a}{\sqrt{26}}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$.

Mà $1+\tan^2\widehat{C'KC}=\dfrac{1}{\cos^2\widehat{C'KC}}\Rightarrow\cos\widehat{C'KC}=\dfrac{3}{\sqrt{35}}$.

Vậy $S_{ABC}=S_{A'B'C'}\cos\widehat{C'KC}\Rightarrow S_{A'B'C'}=\dfrac{S_{ABC}}{\cos\widehat{C'KC}}=\dfrac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

🕮 BÀI TẬP

Bài 2.2.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB=a$ và $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và AC. Tính :

1) Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

2) Cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và BN .

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm BC, suy ra $AK\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAK)$

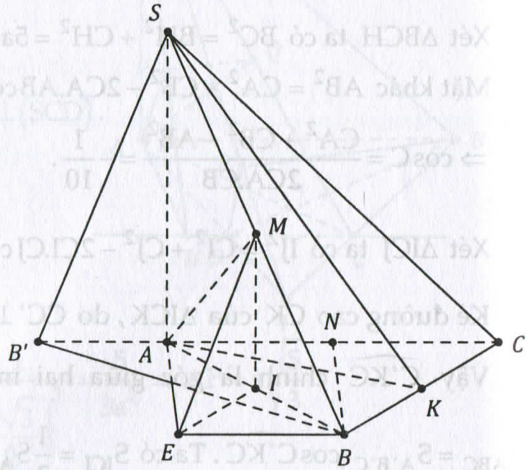
Do đó $\widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), hay $\widehat{SKA}=60^0$

Ta có: $\widehat{BAK}=60^0\Rightarrow AK=AB.\cos60^0=\dfrac{a}{2}$, $BK=AB.\sin60^0=\dfrac{a\sqrt3}{2}\Rightarrow BC=a\sqrt3$.

Trong tam giác SAK, ta có:

$SA=AK.\tan60^0=\dfrac{a\sqrt3}{2}$.

$\Rightarrow SK=\sqrt{SA^2+AK^2}=a$



1) Gọi B′ là hình chiếu của B lên AC, suy ra $BB'\perp(SAC)$ nên tam giác SB'C là hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAC).

Do đó $\cos\varphi=\dfrac{S_{\Delta SB'C}}{S_{\Delta SBC}}$.

Ta có: $S_{\Delta SBC}=\dfrac12 SK.BC=\dfrac{a^2\sqrt3}{2}$.

Do $\widehat{BAB'}=60^0\Rightarrow AB'=AB\cos60^0=\dfrac{a}{2}\Rightarrow CB'=\dfrac{3a}{2}$.

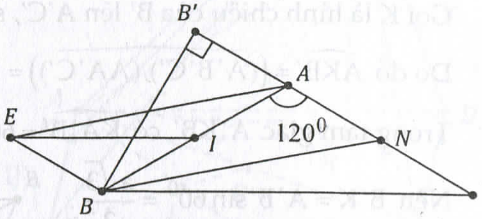
Nên $S_{\Delta SB'C}=\dfrac12 SA.CB'=\dfrac12.\dfrac{a\sqrt3}{2}.\dfrac{3a}{2}=\dfrac{3a\sqrt3}{8}$. Vậy $\cos\varphi=\dfrac34$.

2) Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình bình hành ANBE, suy ra AE//BN. Do đó (AM, BN) = (AM, AE).

Ta có:

$AM=\dfrac12 SB=\dfrac12\sqrt{SA^2+AB^2}=\dfrac{a\sqrt7}{4}$,

$AE=AN=\sqrt{AB^2+AN^2-2AB.AN.\cos120^0}=\dfrac{a\sqrt7}{2}$



Gọi I là trung điểm AB,

suy ra MI//SA, $MI=\dfrac12 SA=\dfrac{a\sqrt3}{4}$.

$EI^2=\dfrac{2(AE^2+BE^2)-AB^2}{4}=\dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow EM^2=EI^2+MI^2=\dfrac{15a^2}{16}$

Suy ra $\cos\widehat{MAE}=\dfrac{AM^2+AE^2-ME^2}{2.AM.AE}=\dfrac57$. Vậy $\cos\widehat{(AM,BN)}=\dfrac57$.

Bài 2.2.2. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a và $BC=a\sqrt2$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC, khi đó MN//AB nên $\widehat{(AB,SC)}=\widehat{(MN,SC)}$.

Đặt $\varphi=\widehat{NMP}$, trong tam giác MNP có: $\cos\varphi=\dfrac{MN^2+MP^2-NP^2}{2MN.MP}$ (1).

Ta có $MN=MP=\dfrac{a}{2}$, $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại A, vì vậy

$PB^2=AP^2+AC^2=\dfrac{5a^2}{4}$, $PS^2=\dfrac{3a^2}{4}$.

Trong tam giác PBS theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$PN^2=\frac{PB^2+PS^2}{2}-\frac{SB^2}{4}=\frac{\frac{5a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}.$$

Thay MN, MP, NP vào (1) ta được $\cos\varphi=-\dfrac12\Rightarrow\varphi=120^0$.

Vậy $\widehat{(AB,SC)}=\widehat{(MN,SC)}=60^0$.

Bài 2.2.3. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân AB = AC = a, $\widehat{BAC}=120^0$ và AB' vuông góc với đáy (A'B'C'). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và A'B', mặt phẳng (AA'C') tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và C'N.

Hướng dẫn giải

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của B′ lên A′C′, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó $\widehat{AKB'} = \left(\widehat{(A'B'C'),(AA'C')}\right) = 30^0$.

Trong tam giác A'KB' có $\widehat{KA'B'} = 60^0, A'B' = a$

Nên $B'K = A'B'\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AB' = B'K.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ:

$V = AB'.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

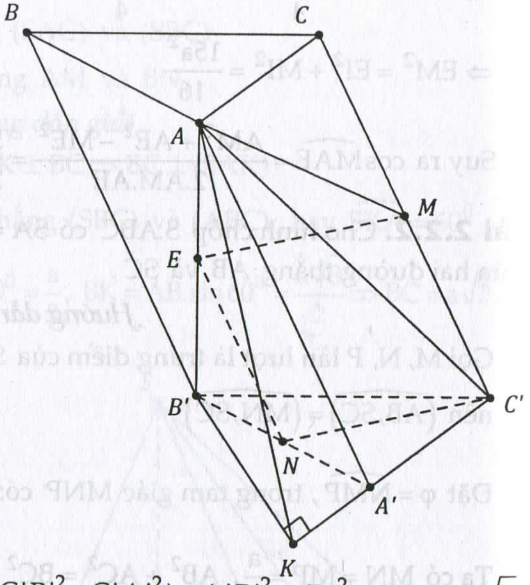
Gọi E là trung điểm của AB′,

suy ra $ME // C'N$,

nên $(C'N, AM) = (EM, AM)$

Vì $AB' \perp C'N \Rightarrow AE \perp EM$

$\Rightarrow (C'N, AM) = \widehat{AME}$



Ta có:

$$AE = \frac{1}{2}AB' = \frac{a}{4}; EM^2 = C'N^2 = \frac{2(C'B'^2 + C'A'^2) - A'B'^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 = \frac{29a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{29}}{4}.$$

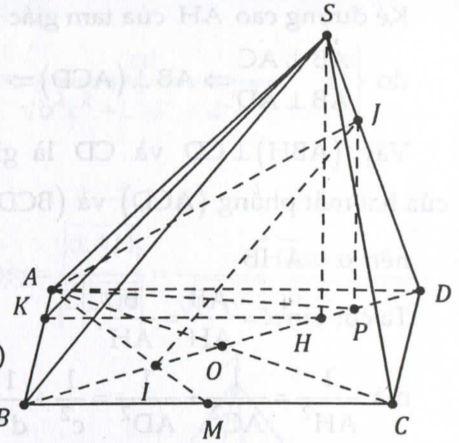
Vậy $\cos\widehat{AME} = \frac{ME}{MA} = 2\sqrt{\frac{7}{29}}$.

Bài 2.2.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi O là tâm của đáy, $SO = SD$. Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm đoạn BC. Tính cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và SB.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của OD, suy ra $SH \perp BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vẽ $HK \perp AB, K \in AB$.



Suy ra $AB \perp (SKH) \Rightarrow \widehat{AKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^0$.

Ta có: $HK = \frac{3}{4}AB = \frac{3a}{2}$

$\Rightarrow SH = HK.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là giao điểm của AM với BC.

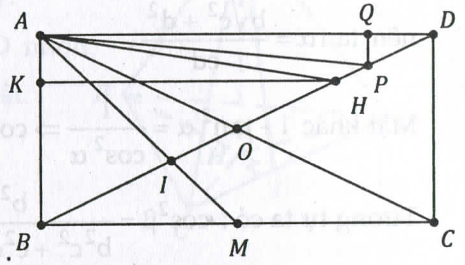
Vẽ $IJ // SB, J \in SD$, ta có $(AM, SB) = (AI, IJ)$

Vì I là trọng tâm tam giác ABC

nên $AI = \frac{2}{3}AM = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

$\frac{IJ}{SB} = \frac{DI}{DB} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow JI = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\sqrt{BH^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.



Vẽ $JP // SH$, $P \in BD \Rightarrow JP = \frac{2}{3}SH = a\sqrt{3}$.

Vẽ $PQ \perp AD, Q \in AD \Rightarrow PQ = \frac{1}{6}AB = \frac{a}{6}, AQ = \frac{5}{6}AD = \frac{5a}{3}$

Suy ra $AP^2 = AQ^2 + PQ^2 = \frac{101a^2}{36} \Rightarrow AJ^2 = AP^2 + JP^2 = \frac{209a^2}{36}$

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác AIJ, ta có:

$$\cos\widehat{AIJ} = \frac{AI^2 + IJ^2 - AJ^2}{2AI.IJ} = -\frac{1}{\sqrt{34}}$$

Vậy $\cos(SB, AM) = \frac{1}{\sqrt{34}}$.

Bài 2.2.5. Cho tứ diện ABCD có $AB = b, AC = c, AD = d$ đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (BCD) với các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC).

1) Chứng minh $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

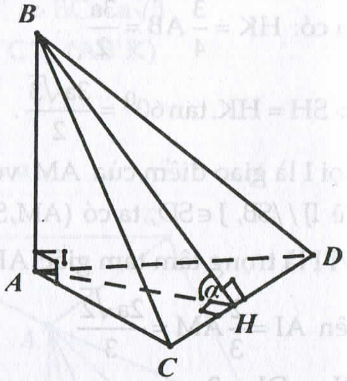
2) Tính S_{BCD} theo khi $\alpha = 30^0, \beta = 45^0, \gamma = 60^0$.

Hướng dẫn giải

1) Cách 1

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD,

do $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.



Vậy $(ABH) \perp CD$ và CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD)

nên $\alpha = \widehat{AHB}$.

Ta có: $\tan\alpha = \frac{AB}{AH} = \frac{b}{AH}$,

mà $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$

nên $\tan\alpha = \frac{b\sqrt{c^2+d^2}}{cd}$.

Mặt khác $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$.

Tương tự ta có : $\cos^2\beta = \frac{b^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$, $\cos^2\gamma = \frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD) và I là trung điểm của CD.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d} \Rightarrow |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, |\vec{d}| = d$.

Dễ thấy $\overrightarrow{AH} \perp (BCD)$ và $\begin{cases} BH.BI = BA^2 = b^2 \\ IH.IB = IA^2 = \frac{c^2d^2}{c^2+d^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{IH} = \frac{b^2(c^2+d^2)}{c^2d^2} = k$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AI}$,

mà $\frac{IC}{ID} = \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{CD}$

nên $\overrightarrow{AH} = \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\overrightarrow{AB} + \frac{b^2c^2+d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\left(\frac{d^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AC} + \frac{c^2}{c^2+d^2}\overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{b} + \frac{d^2b^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{c} + \frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}\vec{d}$

Lại có $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vec tơ vuông góc với các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ACB). Từ đó ta có:

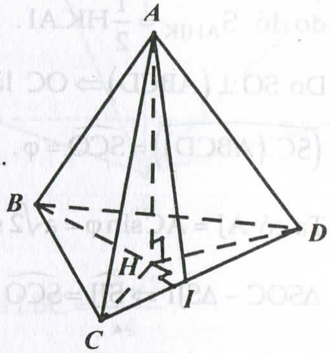
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{b}.\overrightarrow{AH}|}{|\vec{b}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{\frac{b^2c^2d^2}{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}{b\sqrt{\frac{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}{b^2c^2d^2}}} = \frac{cd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Tương tự :

$$\cos\beta = \frac{|\vec{c}.\overrightarrow{AH}|}{|\vec{b}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{bd}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}, \cos\gamma = \frac{|\vec{d}.\overrightarrow{AH}|}{|\vec{b}||\overrightarrow{AH}|} = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2}}$$

Suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

2) Sử dụng công thức hình chiếu



Gọi H là hình chiếu của A trên (BCD).

Trước tiên ta chứng minh tam giác BCD nhọn.

Không giảm tổng quát, giả sử $\widehat{B}$ lớn nhất.

Ta có $CD^2 = AC^2 + AD^2 = c^2 + d^2$

Tương tự $CB^2 = b^2 + c^2, DB^2 = b^2 + d^2$

Áp dụng định lí côsin cho ΔBCD ta có:

$$\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC.BD} = \frac{(b^2+c^2)+(b^2+d^2)-(c^2+d^2)}{2\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}}$$

$= \frac{2b^2}{2\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+d^2)}} > 0$ do đó $\widehat{B}$ nhọn, hay tam giác BCD nhọn.

Ta có $\begin{cases} AH \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow BH \perp CD$, tương tự ta có $CH \perp BD$ từ đó suy ra H là trực tâm của ΔBCD, mà ΔBCD nhọn nên H thuộc miền trong tam giác BCD.

Do đó $S_{BCD} = S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{ABC}\cos\gamma + S_{ABD}\cos\beta + S_{ACD}\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}bc\cos 60^0 + \frac{1}{2}bd\cos 45^0 + \frac{1}{2}cd\cos 30^0 = \frac{bc + \sqrt{2}bd + \sqrt{3}cd}{4}$.

Bài 2.2.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td} = \frac{1}{2}a^2$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm H, J, K.

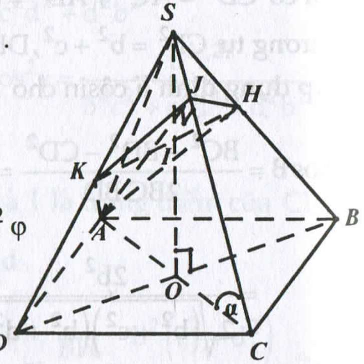
Do $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà $(\alpha) \perp SC \Rightarrow (\alpha) // BD$.

Vậy $\begin{cases} BD \subset (SBD) \\ BD // (\alpha) \\ (SBD) \cap (\alpha) = HK \end{cases} \Rightarrow KH // BD \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AJ$,

do đó $S_{AHJK} = \frac{1}{2} HK.AI$.

Do $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra $\overline{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCO} = \varphi$.

Ta có $AJ = AC \sin\varphi = a\sqrt{2}\sin\varphi$; $SO = OC\tan\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.



$\Delta SOC \sim \Delta SJI \Rightarrow \widehat{SIJ} = \widehat{SCO} = \varphi \Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{SIJ} = \varphi$.

Từ đó ta có $OI = OA\cot\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi$.

$$\frac{HK}{BC} = \frac{SI}{SO} = 1 - \frac{OI}{SO} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi} = 1 - \cot^2\varphi$$

$\Rightarrow KH = BD(1 - \cot^2\varphi) = a\sqrt{2}(1 - \cot^2\varphi)$.

Vậy $S_{AHJK} = \frac{1}{2} HK.AI = a\sqrt{2}\sin\varphi . a\sqrt{2}(1 - \cot^2\varphi) = 2a^2\sin\varphi(1 - \cot^2\varphi)$

Từ giả thiết suy ra $2a^2\sin\varphi(1 - \cot^2\varphi) = \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow 4\sin^2\varphi - \sin\varphi - 2 = 0$

$\sin\varphi = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ (do $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\varphi > 0$) $\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\varphi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

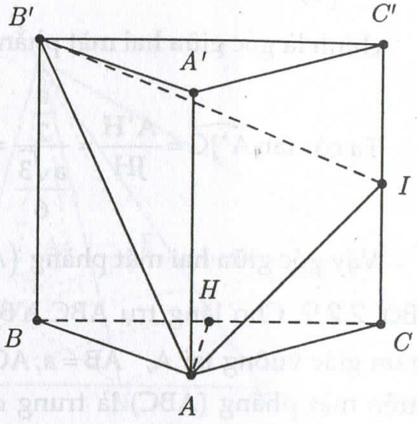
Bài 2.2.7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^0$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Chứng minh rằng tam giác AB'I vuông tại A. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của BC.

Do ΔABC cân tại A nên $AH \perp BC$ và $\widehat{ACH} = 30^0$

Ta có: $AH = AC.\sin\widehat{ACH} = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$,



$BC = 2BH = 2.a\cos 30^0 = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow IB'^2 = IC'^2 + B'C'^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4}$

$AA'B'B$ là hình vuông cạnh a

nên $AB' = a\sqrt{2}$, $AI^2 = IC^2 + AC^2 = \frac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow AI^2 + AB'^2 = \frac{5a^2}{4} + 2a^2 = \frac{13a^2}{4} = IB'^2$

$\Rightarrow \Delta AB'I$ vuông tại A.

Ta có: $S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2}AI.AB' = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi $\varphi = \overline{((ABC),(AB'I))} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

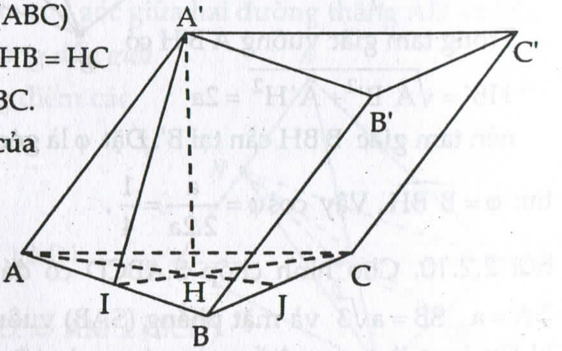
Bài 2.2.8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{\frac{7}{12}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo *a* và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của A trên (ABC)

Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $HA = HB = HC$ suy ra H là tâm tam giác đều ABC.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AB.



Ta có $A'J = \sqrt{AA'^2 - AJ^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{12} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$HJ = \frac{1}{3}CJ = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'H = \sqrt{A'J^2 - HJ^2} = \frac{a}{2}$

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là: $V = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Vì $\begin{cases} A'J \perp AB \\ CJ \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'CJ) \perp AB \Rightarrow \widehat{A'JC}$

chính là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).

Ta có: $\tan\widehat{A'JC} = \frac{A'H}{JH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'JC} = 60^0$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60^0.

Bài 2.2.9. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

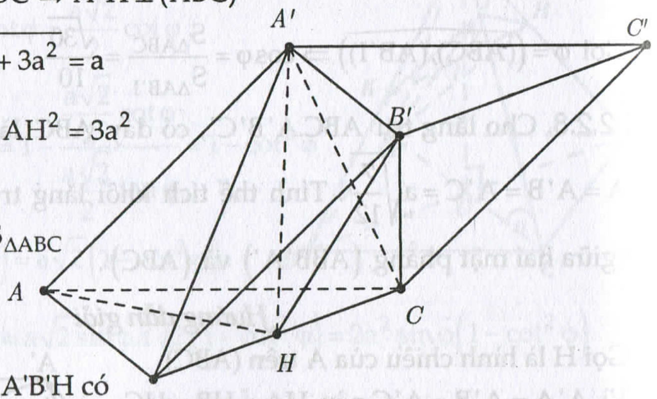
và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC}$

$= \frac{a^3}{3}$ (đvtt).



Trong tam giác vuông A'B'H có

$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$

nên tam giác B'BH cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì: $\varphi = \widehat{B'BH}$. Vậy $\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$.

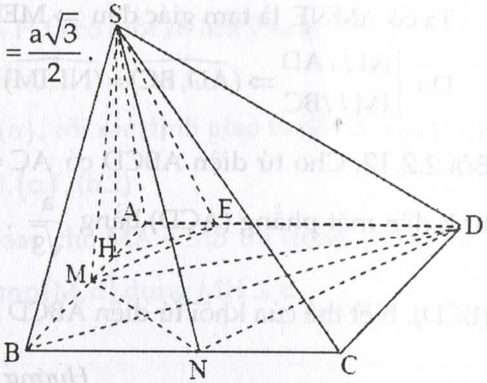
Bài 2.2.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN. Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.

Do đó tam giác SAM đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích tứ giác BMDN là:

$S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ ME / /DN $(E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $\widehat{SM,ME} = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

Suy ra $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

ΔSME cân tại E nên $\widehat{SME} = \varphi$ và $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

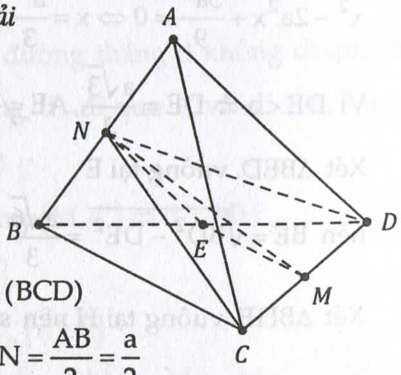
Bài 2.2.11. Cho tứ diện ABCD có các mặt (ABC) và (ABD) là các tam giác đều cạnh a, các mặt (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Hãy tính theo a thể tích khối tứ diện ABCD và tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD và BC.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, I lần lượt là các trung điểm các cạnh CD, AB, BD

$\Rightarrow V_{ABCD} = 2V_{AMCD}$.

$\begin{cases} AB \perp BN \\ AB \perp CN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCN) \Rightarrow AB \perp MN$



Do ΔACD cân tại $A \Rightarrow AM \perp CD \Rightarrow AM \perp (BCD)$

$\Rightarrow AM \perp BM \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại $M \Rightarrow MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow DM = \sqrt{ND^2 - NM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{\Delta CND} = MN.MD = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Vậy thể tích tứ diện ABCD : $V_{ABCD} = 2V_{ANCD} = 2.\frac{1}{3}AN.S_{NCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có ΔMNE là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MEN} = 60^0$.

Do $\begin{cases} NI//AD \\ IM//BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AD,BC)} = \widehat{(NI,IM)} = 60^0$.

Bài 2.2.12. Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD). Biết thể của khối tứ diện ABCD bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AE$.

Ta có ΔACD cân tại A nên $CD \perp AE$. Tương tự $CD \perp BE$

Suy ra $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BH$

Mà $BH \perp AE \Rightarrow BH \perp (ACD) \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Gọi $\alpha = \left((ACD),(BCD)\right)$.

Thể tích của khối tứ diện ABCD là $V = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta ACD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{27}$

$\Rightarrow S_{\Delta SCD} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AE.DE = \frac{a^2\sqrt{5}}{9} \Rightarrow AE^2.DE^2 = \frac{5a^4}{9}$

Mặt khác: $AE^2 + DE^2 = 2a^2 \Rightarrow AE^2, DE^2$ là hai nghiệm của phương trình :

$x^2 - 2a^2x + \frac{5a^4}{9} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{3}, x = \frac{5a^2}{3}$

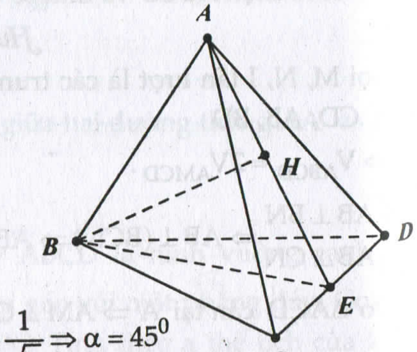
Vì $DE < a \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AE = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

Xét ΔBED vuông tại E

nên $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét ΔBHE vuông tại H nên $\sin\alpha = \frac{BH}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0$

Vậy góc giữa hai mp(ACD) và (BCD) là $\alpha = 45^0$.



§ 3. KHOẢNG CÁCH

1. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) ta có các cách sau:

Cách 1: Xác định hình chiếu vuông góc H của M lên (α).

Để xác định được vị trí hình chiếu H ta có một số lưu ý sau:

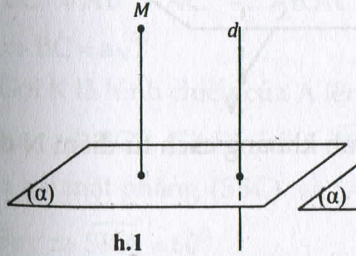
- Nếu có $d \perp (\alpha)$ thì $MH // d$. (h.1)
- Chọn (β) chứa điểm M và $(\beta) \perp (\alpha)$, rồi xác định giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.

  Trong (β) dựng $MH \perp \Delta \Rightarrow MH \perp (\alpha)$. (h.2)
- Nếu trong (α) có hai điểm A, B sao cho MA = MB thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB, rồi trong $mp(M,d)$ dựng $MH \perp d$.

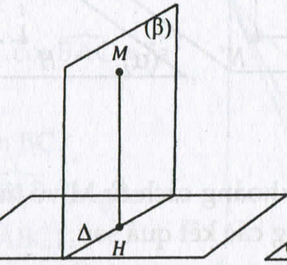
  Khi đó $MH \perp (\alpha)$ (h.3)

  Thật vậy, gọi I là trung điểm của AB. Do MA = MB nên ΔMAB cân tại $M \Rightarrow MI \perp AB \subset (\alpha)$. Lại có $AB \perp d \Rightarrow AB \perp mp(M,d) \Rightarrow AB \perp MH$.

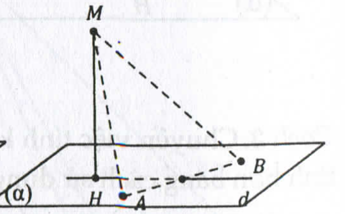
  Vậy $\begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp d \end{cases} \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.



h.1



h.2



h.3

- Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA \perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$, rồi trong $mp(M,d')$ kẻ $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp (\alpha)$ (h. 4)

  Thật vậy, do $d \perp d'$ và $d \perp MA \Rightarrow d \perp mp(M,d') \Rightarrow d \perp MH$.

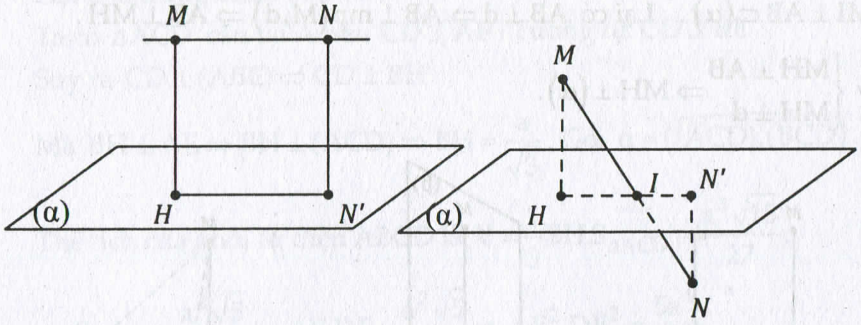
  Lại có $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp mp(d,d') \equiv (\alpha)$.
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$

  Mà $MA_1 = MA_2 = ... = MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1, MA_2, ..., MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.

- Nếu trong (α) có các điểm $A_1,A_2,...,A_n\ (n\ge 3)$ mà các mặt phẳng $(MA_1A_2),(MA_2A_3),\ ...,(MA_nA_1)$ thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tự như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:

Nếu tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Cách 2: Sử dụng công thức thể tích: Xét một hình chóp có M là đỉnh, đáy nằm trong mặt phẳng (α). Khi đó: $d(M,(\alpha))=\frac{3V}{S_d}$.



Cách 3: Chuyển việc tính khoảng cách từ M về tính khoảng cách từ điểm N dễ tính hơn bằng cách sử dụng các kết quả sau:

- Nếu $MN//(\alpha)$ thì $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))$.
- Nếu $MN\cap(\alpha)=\{I\}$ thì $d(M,(\alpha))=\frac{MI}{NI}.d(N,(\alpha))$.

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1: Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b)=MN$.

Chú ý: Nếu $a\perp b$ thì ta dựng đoạn vuông góc chung của a và b như sau

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.

- Dựng $OH\perp b$.

Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Dựng mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b, khi đó: $d(a,b)=d(a,(\alpha))=d(M,(\alpha))$ với M là điểm bất kì thuộc (α).

Cách 3: Dựng hai mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b, (β) đi qua b và song song với a. Khi đó: $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))$.

Cách 4: Phương pháp véc tơ:

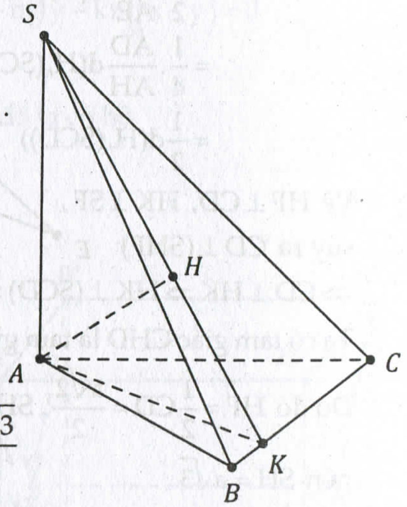
MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$

Ví dụ 2.3.1. Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$; $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính:

1) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

2) Khoảng cách từ B đến (SAC).

Lời giải.



Áp dụng định lí cô sin, ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}=7a^2$

$\Rightarrow BC=a\sqrt{7}$

Gọi K là hình chiếu của A lên BC suy ra $BC\perp(SAK)$ nên $\widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Suy ra $\widehat{SKA}=60^0$

Ta có:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AK.BC=\frac{1}{2}AB.AC.\sin120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Rightarrow SA=AK.\tan60^0=\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

1) Gọi H là hình chiếu của A lên SK.

Do $BC\perp(SAK)\Rightarrow BC\perp AH\Rightarrow AH\perp(SBC)$

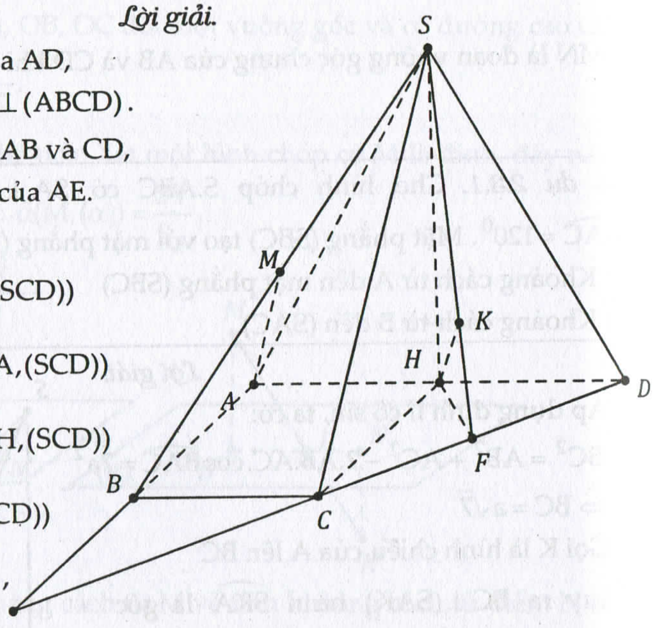
Suy ra $d(A,(SBC))=AH=\frac{SA.AK}{\sqrt{SA^2+AK^2}}=\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

2) Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{3a}{\sqrt{7}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{21}}{14}$, $S_{\Delta SAC}=\frac{1}{2}SA.AC=\frac{3a^2}{\sqrt{7}}$

Suy ra $d(B,(SAC))=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

> ***Ví dụ* 2.3.2.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AD, suy ra $SH\perp AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Gọi E là giao điểm của AB và CD, suy ra B là trung điểm của AE.

Ta có:

$$d(H,(SCD))=\frac{HS}{BS}d(B,(SCD))$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{BE}{AE}.d(A,(SCD))$$
$$=\frac{1}{4}.\frac{AD}{AH}d(H,(SCD))$$
$$=\frac{1}{2}d(H,(SCD))$$

Vẽ $HF\perp CD$, $HK\perp SF$, suy ra $CD\perp(SHF)$

$\Rightarrow CD\perp HK\Rightarrow HK\perp(SCD)\Rightarrow d(H,(SCD))=HK$

Ta có tam giác CHD là tam giác vuông cân tại H nên F là trung điểm cạnh CD

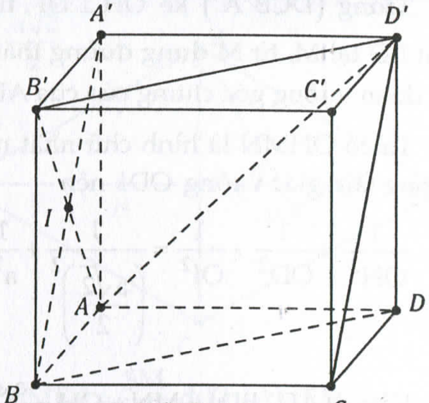
Do đó $HF=\frac{1}{2}CD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. SH là đường cao tam giác đều cạnh 2a nên $SH=a\sqrt{3}$

Suy ra $HK=\frac{HF.SH}{\sqrt{HF^2+SH^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d(H,(SCD))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

> ***Ví dụ* 2.3.3.** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1: **(Hình 1)**



Hình 1

Gọi I là tâm của hình vuông ABB'A'.

Ta có: $\begin{cases}AD'\subset(AB'D')\\BD//(AB'D')\end{cases}$

$\Rightarrow d(AD',BD)=d(BD,(AB'D'))$
$=d(B,(AB'D'))=d(A',(AB'D'))$.

Vì A'AB'D' là tứ diện vuông đỉnh A' nên $d(A',(AB'D'))=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $d(AD',BD)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M\in AD',N\in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x},\overrightarrow{AD}=\vec{y},\overrightarrow{AA'}=\vec{z}\Rightarrow|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=a,\vec{x}\vec{y}=\vec{y}\vec{z}=\vec{z}\vec{x}=0$

$\overrightarrow{AD'}=\vec{y}+\vec{z}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD'}=k(\vec{y}+\vec{z}),\overrightarrow{DB}=\vec{x}-\vec{y}\Rightarrow\overrightarrow{DN}=m(\vec{x}-\vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{AM}=m\vec{x}+(1-k-m)\vec{y}-k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB}=0\Leftrightarrow\left(m\vec{x}+(1-k-m)\vec{y}+k\vec{z}\right)(\vec{x}-\vec{y})=0$

$\Leftrightarrow 2m+k-1=0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=0\Leftrightarrow 1-m-2k=0$, từ đó ta có hệ

$$\begin{cases}2m+k=1\\m+2k=1\end{cases}\Leftrightarrow m=k=\frac{1}{3}.$$

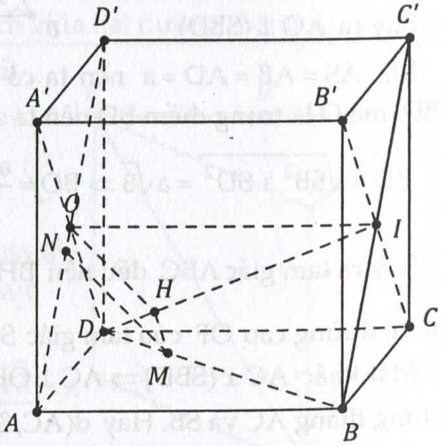
Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}-\frac{1}{3}\vec{z}$

$\Rightarrow MN=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2+\vec{y}^2+\vec{z}^2\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Cách 3: **(Hình 2)**

Chọn (DCB'A') vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'.

Gọi I là tâm của hình vuông BCC'B' thì $BI\perp CB'$ và $BI\perp CD$ nên $BI\perp(DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên (DCB'A').



Hình 2

Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD',BD) = MN$.

Ta có OHMN là hình chữ nhật nên MN = OH, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

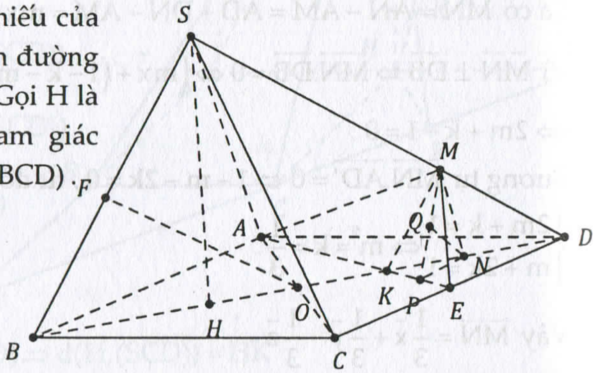
Vậy $d(AD',BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2.3.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $SD = a\sqrt{2}$, $SA = SB = SC = a$. Gọi E là trung điểm cạnh CD. Tính :

1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AE và SB.

Lời giải.



Vì SA = SB = SC nên hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $H \in BD$ và $SH \perp (ABCD)$.

Do ABCD là hình thoi nên $AO \perp BD$ (O là tâm của hình thoi ABCD).

Suy ra $AO \perp (SBD)$

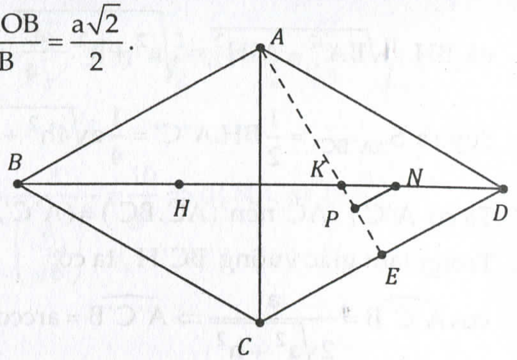
Mà AS = AB = AD = a nên ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD, mà O là trung điểm BD nên ta suy ra tam giác SBD vuông tại S, suy ra

$$BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra tam giác ABC đều nên $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

1) Vẽ đường cao OF của tam giác SOB, ta có $OF \perp SB$

Mặt khác $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OF \Rightarrow OF$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SB. Hay $d(AC,SB) = OF$.



Ta có: $OF.SB = SH.BO \Rightarrow FO = \frac{SH.OB}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AC,SB) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2) Gọi K là giao điểm của AE với BD, K là trọng tâm tam giác ADC.

Từ K vẽ đường thẳng song song với SB, cắt SD tại M. Suy ra $SB // (AME)$

Suy ra $d(SB,AE) = d(SB,(AME)) = d(S,(AME)) = \frac{SM}{DM}.d(M,(AME))$

Từ M vẽ $MN // SH$, $N \in BD$, suy ra $d(D,(AME)) = \frac{DK}{NK}d(N,(AME))$.

Ta có: $\frac{SM}{DM} = \frac{SK}{DK} = 2$, $\frac{DN}{DH} = \frac{DM}{DS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DN}{DK} = \frac{2}{3}$

Suy ra $d(SB,AE) = \frac{4}{3}d(N,(AME))$.

Vẽ $NP \perp KE \Rightarrow KE \perp (MNP)$, vẽ $NQ \perp MP$.

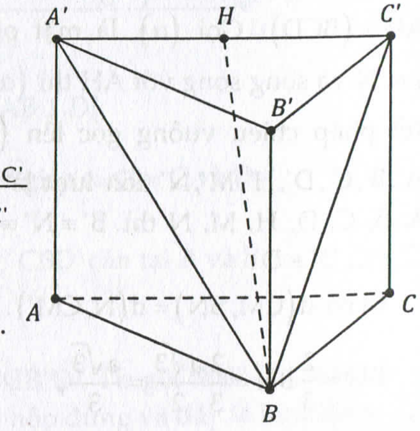
Ta có $NQ \perp KE \Rightarrow NQ \perp (AME) \Rightarrow d(N,(AME)) = NQ$

Ta có: $MN = \frac{1}{3}SH = \frac{a\sqrt{6}}{9}$, $\frac{NP}{DE} = \frac{KN}{KD} = \frac{1}{3} \Rightarrow NP = \frac{1}{3}DE = \frac{a}{6}$

Suy ra $NQ = \frac{NM.NP}{\sqrt{NM^2 + NP^2}} = \frac{a\sqrt{22}}{33}$. Vậy $d(SB,AE) = \frac{a\sqrt{22}}{33}$.

Ví dụ 2.3.5. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, chiều cao bằng h. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC'.

Lời giải.



Ta có mặt phẳng (BA'C') chứa BC' và song song với AC nên

$d = d(AC,BC') = d(AC,(BA'C'))$

$= d(A,(BA'C')) = d(B',(BA'C')) = \frac{3V_{B'.BA'C'}}{S_{\Delta BA'C'}}$

Mặt khác:

$V_{B'.BA'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$.

Tam giác A'BC' cân tại B

và $BH=\sqrt{BA'^2-A'H^2}=\sqrt{a^2+h^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$.

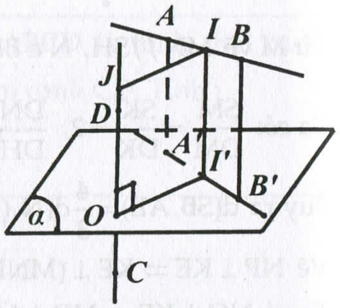
Suy ra $S_{\Delta A'BC'}=\dfrac{1}{2}BH.A'C'=\dfrac{1}{4}a\sqrt{4h^2+3a^2}$. Do vậy $d=\dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

Ta có $A'C'//AC$ nên $(AC,BC')=(A'C',BC')=\widehat{A'C'B}$.

Trong tam giác vuông $BC'H$, ta có:

$$\cos\widehat{A'C'B}=\frac{a}{2\sqrt{a^2+h^2}}\Rightarrow\widehat{A'C'B}=\arccos\frac{a}{2\sqrt{a^2+h^2}}$$

Vậy $(AC,BC')=\arccos\dfrac{a}{2\sqrt{a^2+h^2}}$.



Chú ý: Ta cũng có thể sử dụng phép chiếu vuông góc để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Cho hai đường thẳng chéo nhau AB và CD

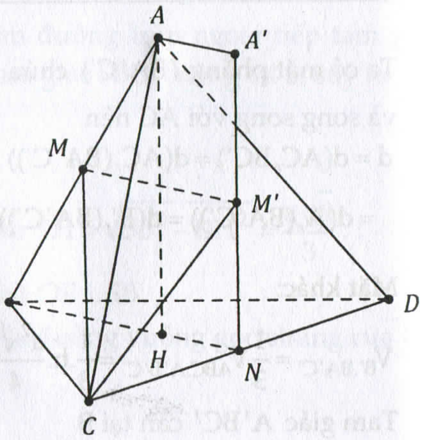
Xét mặt phẳng (α) vuông góc với CD tại điểm O. Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD ($I\in AB, J\in CD$)

Xét phép chiếu vuông góc lên (α), Gọi A',B',I' là hình chiếu của A, B, I thì $IJ=OI'$, từ đó $d(AB,CD)=d(O,A'B')$.

Vậy để tính IJ ta qui về tính OI' trong mặt phẳng (α).

Ví dụ 2.3.6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Lời giải.



Gọi H là tâm của tam giác đều BCD thì $AH\perp(BCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với AH thì $(\alpha)\perp BN$.

Xét phép chiếu vuông góc lên (α), gọi A',B',C',D',H',M',N' lần lượt là ảnh của A, B, C, D, H, M, N thì $B'\equiv N'\equiv H'\equiv N$, $C'\equiv C, D'\equiv D$.

Ta có $d(CM,BN)=d(N,CM')$.

$BH=\dfrac{2}{3}BN=\dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

---

$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $NM'=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{1}{2}a\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Tam giác NCM' vuông tại N nên:

$$\frac{1}{d^2(N,CM')}=\frac{1}{CN^2}+\frac{1}{NM'^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2}=\frac{10}{a^2}\Rightarrow d(N,CM')=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d(CM,BN)=d(N,CM')=\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

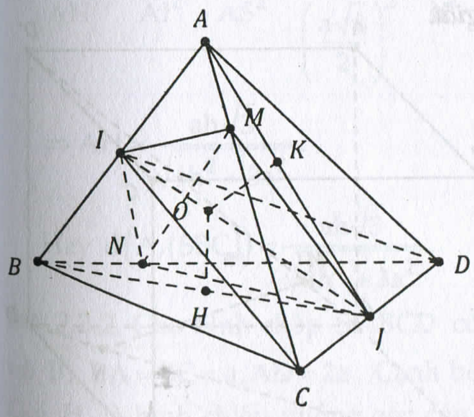
Ví dụ 2.3.7. Cho tứ diện ABCD có $AB\perp CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

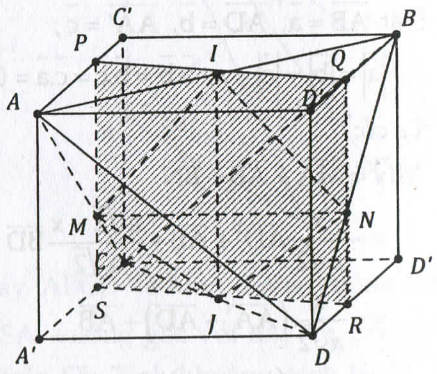
1) Chứng minh rằng $AC=AD=BC=BD$

2) Một mặt phẳng đi qua IJ cắt AC, BD theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng $MN\perp IJ$ và MN bị IJ chia thành hai phần bằng nhau.

3) O là một điểm thuộc đoạn thẳng IJ. Chứng minh rằng O cách đều mặt phẳng (ABC), (ABD), O cách đều hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Lời giải.





1) Ta có: $\begin{cases}IJ\perp AB\\CD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(CID)\Rightarrow AB\perp CI,\ AB\perp DI$

Suy ra các tam giác ACB, ADB là những tam giác cân tại C và D.

Từ đó suy ra $AC=BC,\ AD=BD$ (1)

Chứng minh tương tự thì các tam giác CAD, CBD cân tại A và B.

Suy ra $AC=AD,\ BC=BD$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $AC=AD=BD=BC$.

2) Nội tiếp tứ diện bằng hình hộp AC'BD'.A'CB'D. Từ giả thiết bài toán, ta suy ra được hình hộp AC'BD'.A'CB'D là hình hộp đứng và đáy là hình thoi.

Mặt phẳng đi qua IJ, cắt hình hộp theo thiết diện là hình chữ nhật PQRS

Vì I là tâm của hình thoi $A'DB'C$ nên ta có:

$CS = DR \Rightarrow \Delta CSM = \Delta DRN \Rightarrow MS = NR$

Suy ra $MN // CR$, nên IJ vuông góc và chia đôi MN.

3) Gọi H là hình chiếu của O lên BJ, K là hình chiếu của O lên AJ.

Do $CD \perp (AJB) \Rightarrow CD \perp OH \Rightarrow OH \perp (BCD) \Rightarrow d(O,(BCD)) = OH$

Tương tự $d(O,(ACD)) = OK$.

Vì $JB = JA$ nên tam giác AJB cân tại J và JI là đường phân giác trong góc $\widehat{AJB}$

Suy ra $OH = OK \Rightarrow$ O cách đều hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

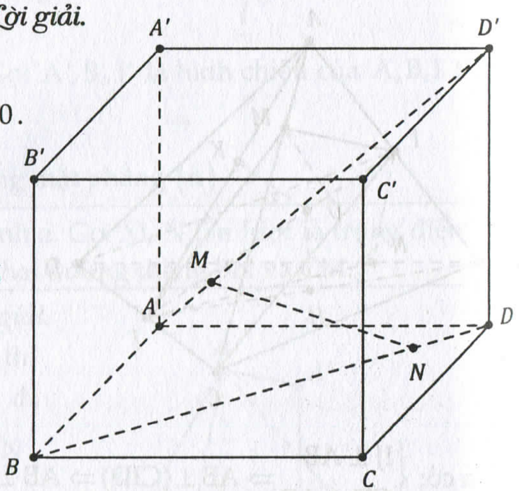
Chứng minh tương tự ta cũng có được O cách đều hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Ví dụ 2.3.8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy điểm M thuộc đoạn AD', N thuộc BD sao cho $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$.

1) Tìm x theo a để MN ngắn nhất. Khi đó hãy chứng minh: MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD′, BD và MN // A'C.

2) Chứng minh rằng khi x thay đổi thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$;

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$.

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$= -\frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AB} + \frac{a\sqrt{2} - x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{BD}$$

$$= -\frac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}x}{a}\right)\vec{b} - \frac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}$$

Suy ra: $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{x^2}{2} + a^2 - 2xa\sqrt{2} + 2x^2 + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2ax\sqrt{2} + a^2 = 3\left(x - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}$

Từ đó, ta có MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

BÀI TẬP

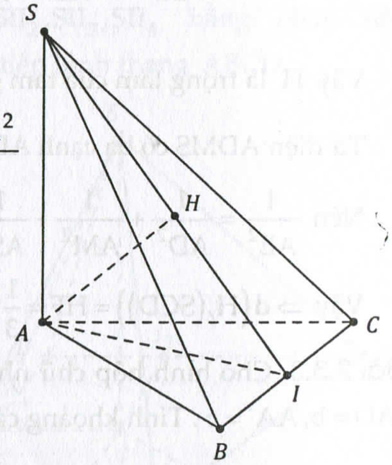
Bài 2.3.1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Trong (SBC) kẻ $AH \perp SI$. Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AH$.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác AIS ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{4h^2 + 3a^2}{3a^2h^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

Hay $d\left(A,(SBC)\right) = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$

Bài 2.3.2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

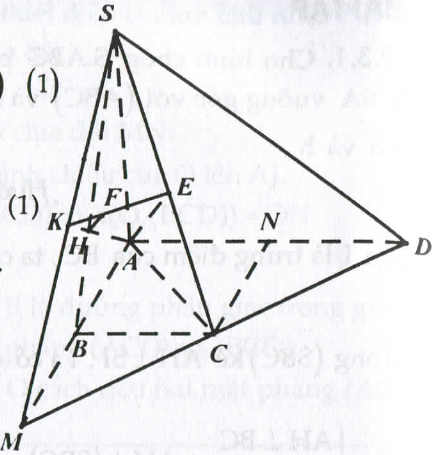
Hướng dẫn giải

Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.

Dễ thấy ABCN là hình vuông nên $NC = AB = a$.

Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$

Lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.



$$\text{Vậy}\begin{cases}(SAC)\perp(SCD)\\(SAC)\cap(SCD)=SC\\AE\subset(SAC)\\AE\perp SC\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SCD)\ \ (1)$$

Trong (AKE) kẻ $HF//AE, F\in KE$, thì từ (1)

Suy ra $HF\perp(SCD)\Rightarrow d(H,(SCD))=HF$.

Do $BC//AD\Rightarrow \dfrac{MB}{MA}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow MA=2AB=2a$

$\Rightarrow B$ là trung điểm của MA.

Lại có $\dfrac{BH}{BS}=\dfrac{BH.BS}{BS^2}=\dfrac{BA^2}{AB^2+AS^2}=\dfrac{a^2}{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó $\dfrac{HF}{AE}=\dfrac{KH}{KA}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow HF=\dfrac{1}{3}AE$.

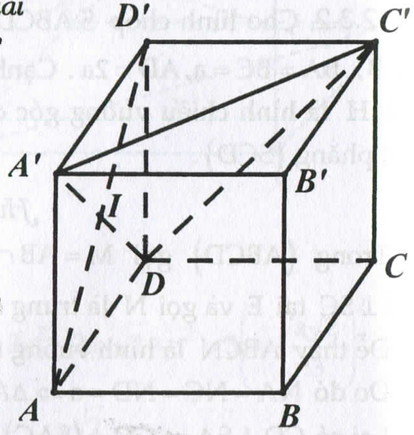
Tứ diện ADMS có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và $AE\perp(SMD)$

Nên $\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AS^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow AE=a$.

Vậy $\Rightarrow d(H,(SCD))=HF=\dfrac{1}{3}AE=\dfrac{a}{3}$.

Bài 2.3.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB=a$, $AD=b, AA'=c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ thì I là trung điểm của AD'.

Ta có $\dfrac{d(A,(DA'C'))}{d(D',(DA'C'))}=\dfrac{IA}{ID'}=1$

$\Rightarrow d(A,(DA'C'))=d(D',(DA'C'))$.

Mặt khác ta có tứ diện $D'ADC'$ có các cạnh $D'D, D'A', D'C'$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2(D',(DA'C'))}=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'C'^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

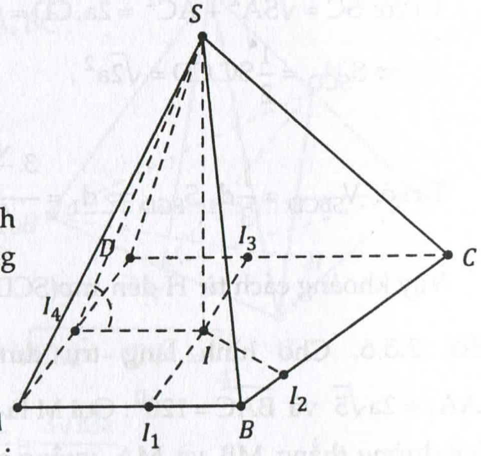
$$\text{Vậy } d(A,(DA'C'))=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Bài 2.3.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều và có cạnh bằng 2a, $BC=3a$ các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên$(ABCD)$.

Gọi I_1,I_2,I_3,I_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB,BC,CD,DA thì các góc $\widehat{II_iS}\,(i=1,4)$ là góc giữa các mặt bên và mặt đáy do đó chúng bằng nhau,suy ra các tam giác vuông SII_1,SII_2,SII_3,SII_4 bằng nhau nên $II_1=II_2=II_3=II_4\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang ABCD.



Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp nên $AB+DC=AD+BC=5a$

Diện tích hình thang ABCD là

$S=\dfrac{1}{2}(AB+DC)AD=\dfrac{1}{2}.5a.2a=5a^2$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang ABCD thì

$p=\dfrac{AB+DC+AD+BC}{2}=\dfrac{10a}{2}=5a$

$S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{5a^2}{5a}=a\Rightarrow II_4=r=a$.

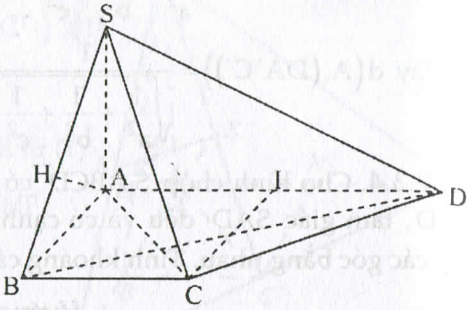
Tam giác SAD đều và có cạnh *2a* nên

$SI_4=\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow SI=\sqrt{SI_4^{\,2}-II_4^{\,2}}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$

Vậy $d(S,(ABCD))=SI=a\sqrt{2}$.

Bài 2.3.5. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{ABC}=90^0$, $BA=BC=a, AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mp(SCD).

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có $CI = IA = ID = \dfrac{AD}{2}$

suy ra ΔACD vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp SD$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông.

Gọi $d_1; d_2$ lần lượt là khoảng cách từ B, H đến mp(SCD)

Ta có: $\Delta SAB \sim \Delta SHA \Rightarrow \dfrac{SA}{SH} = \dfrac{SB}{SA} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{2}{3}; \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \dfrac{2}{3}d_1$.

Thể tích khối tứ diện SBCD: $V_{SBCD} = \dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a, CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow S_{SCD} = \dfrac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2$.

Ta có: $V_{SBCD} = \dfrac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \dfrac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến mp(SCD) là $d_1 = \dfrac{a}{3}$.

Bài 2.3.6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh hai đường thẳng MB và MA_1 vuông góc với nhau. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BM).

Hướng dẫn giải

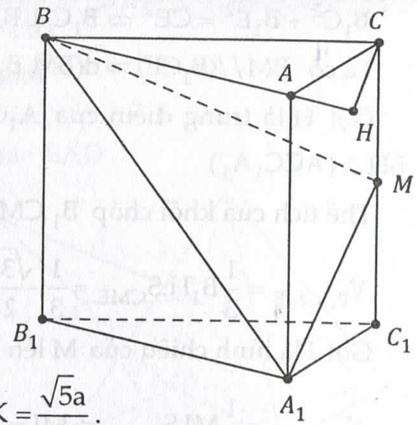
Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0} = a\sqrt{7}$

$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = 2\sqrt{3}a$; $A_1M = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1M^2} = 3a$

$BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{21}a$; $BM^2 + A_1M^2 = BA_1^2$

Suy ra $MB \perp MA_1$. Kẻ $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (ABA_1)$.

Ta có $CH = AC.\sin 60^0 = \sqrt{3}a$.



Thể tích khối tứ diện M.ABA:

$V_{M.ABA_1} = \dfrac{1}{3}.CH.\dfrac{1}{2}AB.AA_1 = \dfrac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

Gọi K là hình chiếu của A lên $mp(A_1BM)$

ta có:

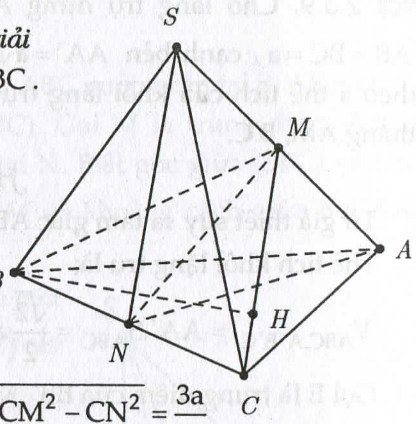
$V_{M.ABA_1} = \dfrac{1}{3}AK.\dfrac{1}{2}MB.MA_1$

$\Rightarrow AK = \dfrac{6V_{M.ABA_1}}{MB.MA_1} = \dfrac{\sqrt{5}a}{3}$

Vậy khoảng cách từ A đến (A_1BM) là $AK = \dfrac{\sqrt{5}a}{3}$.

Bài 2.3.7. Cho hình chóp S.ABC có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0, các tam giác ABC và SBC là tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mp(SAC).

Hướng dẫn giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC.

Kẻ $BH \perp CN$ tại H suy ra BH là khoảng cách từ B tới *mp*(SAC)

Ta có $\widehat{SNA} = 60^0$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC),(ABC).

Tam giác SAN đều cạnh $SA = AN = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Ta có $CM = \sqrt{CA^2 - AM^2} = \dfrac{\sqrt{13}a}{4}; MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \dfrac{3a}{4}$

Ta có: $BH.CM = MN.BC \Rightarrow BH = \dfrac{MN.BC}{CM} = \dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$.

Bài 2.3.8. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a, M là trung điểm của AA_1. Chứng minh $BM \perp B_1C$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và B_1C.

Hướng dẫn giải

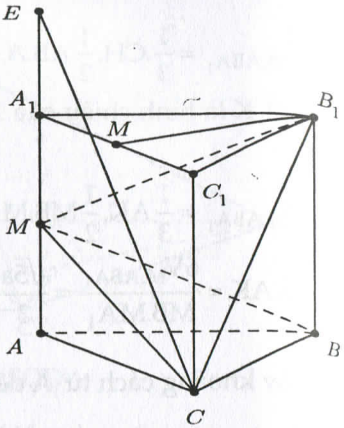
* Gọi E là điểm trên đường thẳng AA_1 sao cho A_1 là trung điểm của đoạn ME, ta có $BM // B_1E$.

$B_1C = \sqrt{2}a, B_1E = BM = \sqrt{BA^2 + AM^2} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}, CE = \sqrt{CA^2 + AE^2} = \dfrac{\sqrt{13}a}{2}$.

$B_1C^2 + B_1E^2 = CE^2 \Rightarrow B_1C \perp B_1E \Rightarrow B_1C \perp BM$

* Ta có $BM // (B_1CE) \Rightarrow d(BM, B_1C) = d(M, (B_1CE))$

Gọi H là trung điểm của A_1C_1 ta có $BH \perp (ACC_1A_1)$



Thể tích của khối chóp $B_1.CME$:

$$V_{B_1.CME} = \frac{1}{3}B_1H.S_{CME} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{1}{2}a.a = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$$

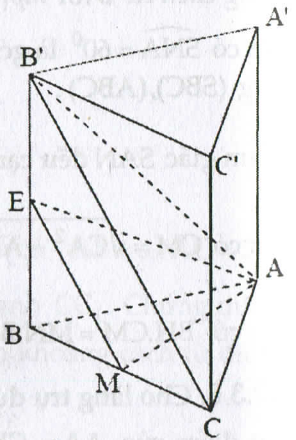
Gọi I là hình chiếu của M lên $mp(B_1EC)$ ta có :

$$V_{M.B_1CE} = \frac{1}{3}MI.S_{B_1CE} \Rightarrow MI = \frac{3V_{B_1.CME}}{S_{B_1CE}} = \frac{\sqrt{30}a}{10}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C, BM là $MI = \frac{\sqrt{30}a}{10}$.

Bài 2.3.9. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Gọi E là trung điểm của BB′. Khi đó $B'C // (AME)$

Suy ra

$d(AM, B'C) = d(B'C, (AME))$

$= d(C, (AME)) = d(B, (AME))$

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME).

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C là $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

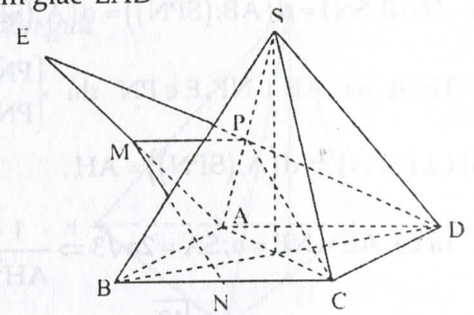
Bài 2.3.10. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của

AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Hướng dẫn giải

Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MP là đường trung bình của tam giác EAD



$\Rightarrow MP // AD \Rightarrow MP // NC$.

Và $MN = \frac{1}{2}AD = NC$.

Suy ra MNCP là hình bình hành

$\Rightarrow MN // CP \Rightarrow MN // (SAC)$.

Ta dễ chứng minh được

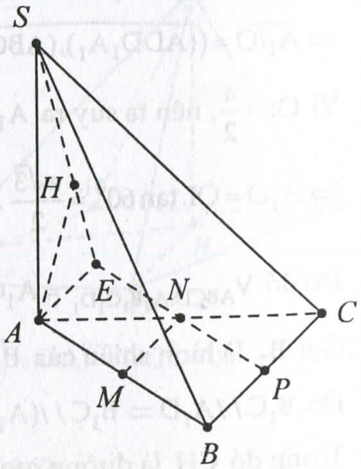
$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$

Vì $MN // (SAC)$ nên: $d(MN, AC) = d(N, (SAC)) = \frac{1}{2}d(B, (SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Vậy $d(MN, AC) = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Bài 2.3.11. Cho hình chóp SABC có tam giác ABC vuông cân tại B, AB = BC = 2a, (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng qua MS song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN.

Hướng dẫn giải



Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp S.BCNM.

Ta có :

$S_{BCNM} = S_{ABC} - S_{AMN}$

$= 2a^2 - \frac{1}{2}MA.MN = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp BC$.

Nên $\widehat{SBA}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), thế thì theo giả thiết ta có $\widehat{SBA} = 60^0$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = \sqrt{3}a^3$ (dvtt)

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB//NP, AB \not\subset (SPN)$ nên $AB//(SPN)$ do đó $d(AB,SN) = d(AB;(SPN)) = d(A;(SPN))$

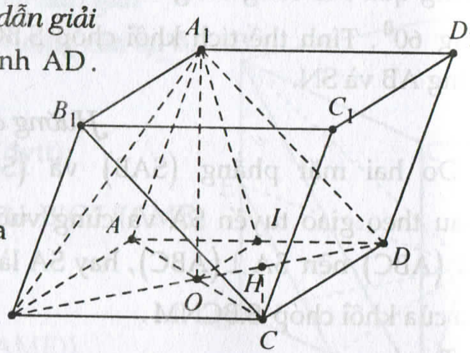
Từ A hạ $AE \perp NP, E \in PN$ thì $\begin{cases} PN \perp AE \\ PN \perp SA \end{cases} \Rightarrow PN \perp (SAE)$;hạ $AH \perp SE$ thì $AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A;(SPN)) = AH$.

Ta có $AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{13}}$

Vậy $d(A;(SPN)) = a\sqrt{\frac{12}{13}}$

Bài 2.3.12. Cho lăng trụ ABCD.A₁B₁C₁D₁ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A₁ trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD₁A₁) và (ABCD) bằng 60⁰. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B₁ đến mặt phẳng (A₁BD) theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm cạnh AD.

Ta có $AD \perp (AOI)$

$\Rightarrow \widehat{A_1IO} = \overline{((ADD_1A_1),(ABCD))} = 60^0$

Vì $OI = \frac{a}{2}$, nên ta suy ra $A_1I = 2OI = a$

$\Rightarrow A_1O = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O.S_{ABCD} = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

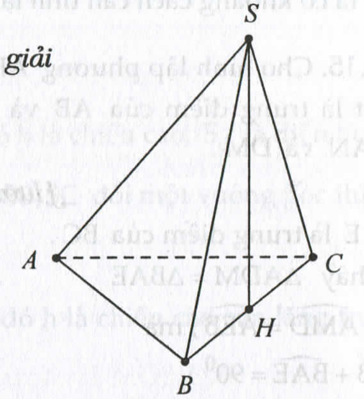
Gọi B_2 là hình chiếu của B_1 xuống mặt phẳng (ABCD)

Do $B_1C//A_1D \Rightarrow B_1C//(A_1BD) \Rightarrow d(B_1,(A_1BD)) = d(C,(A_1BD)) = CH$

Trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD

Ta có: $CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(B_1,(A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2.3.13. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.



Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S xuống BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên

$SH \perp (ABC)$. Ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

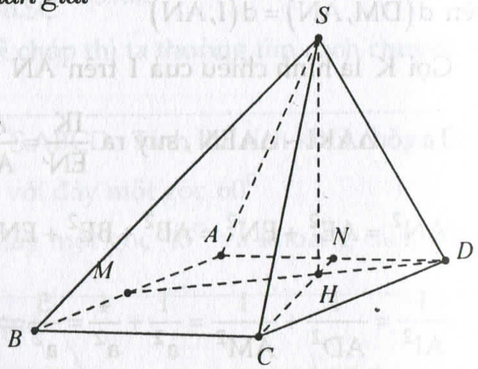
Ta có tam giác SAC vuông tại S.

Vì $SA = a\sqrt{21}, SC = 2a, AC = 5a$

và $S_{\Delta SAC} = a^2\sqrt{21}$ nên ta có được $d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}$.

Bài 2.3.14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Hướng dẫn giải



Ta có: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.S_{MNDC}$

Mà $S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC}$

$= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$.

Nên

$V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$ (đvtt).

Lại thấy: $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right).\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) = DA^2 - DC^2 = 0$.

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy:

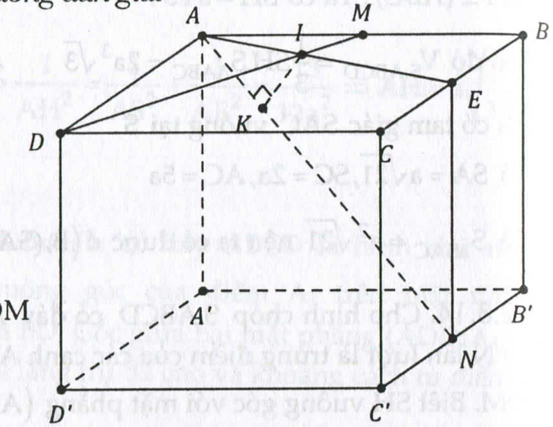
$d(SC;DM) = d(H;SC) = \frac{2S_{\Delta HSC}}{SC} = \frac{SH.CH}{SC} = \frac{SH.CH}{\sqrt{SH^2 + CH^2}}$.

Lại có: $CH = \frac{2S_{\Delta CMD}}{DM} = \frac{2(S_{ABCD} - S_{\Delta AMD} - S_{\Delta CMB})}{DM} = a\sqrt{\frac{4}{5}}$

Hay ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

Bài 2.3.15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và B'C'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM.

Hướng dẫn giải



Gọi E là trung điểm của BC.

Dễ thấy $\Delta ADM = \Delta BAE$

nên $\widehat{AMD} = \widehat{AEB}$, mà

$\widehat{AEB} + \widehat{BAE} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AMD} + \widehat{BAE} = 90^0$

$\Rightarrow DM \perp AE$.

Lại có $EN \perp (ABCD) \Rightarrow EN \perp DM$

do đó $(AEN) \perp DM$ tại I.

Xét phép chiếu vuông góc lên (ANE), ta có AN chính là hình chiếu của nó nên $d(DM, AN) = d(I, AN)$

Gọi K là hình chiếu của I trên AN thì $d(I, AN) = IK$.

Ta có $\Delta AKI \sim \Delta AEN$, suy ra $\frac{IK}{EN} = \frac{AI}{AN} \Rightarrow IK = \frac{AI.EN}{AN}$ (1)

$$AN^2 = AE^2 + EN^2 = AB^2 + BE^2 + EN^2 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow AN = \frac{3a}{2}.$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Thay vào (1) ta được $IK = \frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Vậy $d(DM, AN) = \frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

---

§ 4. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Để tính thể tích của một khối đa diện (lăng trụ và hình chóp) ta thường thực hiện theo các cách sau

Cách 1: Tính trực tiếp

Sử dụng các công thức:

- Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}h.S_d$, trong đó h là chiều cao, S_d là diện tích đáy.

Đặc biệt: Nếu hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc thì:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC.$$

- Thể tích khối lăng trụ: $V = h.S_d$, trong đó h là chiều cao của lăng trụ, S_d là diện tích đáy.

Đặc biệt:

+) Hình hộp chữ nhật ba cạnh a, b, c: $V = abc$

+) Hình hộp lập phương cạnh a: $V = a^3$

Cách 2. Tính gián tiếp.

- Nếu hình H được tách thành hai hình rời nhau H_1, H_2 thì $V_{H_1} = V_H - V_{H_2}$
- Trên các đường thẳng SA, SB, SC của hình chóp S.ABC ta lấy lần lượt các điểm A', B', C'. Ta có: $V_{S.A'B'C'} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}V_{S.ABC}$.

Chú ý: Khi xét tỉ số thể tích của hai khối chóp thì ta thường tìm cách chuyển về hai khối chóp có chung mặt phẳng đáy.

> ***Ví dụ 2.4.1.*** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Tính thể tích khối chóp biết
>
> 1) Cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$ và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0
>
> 2) Đường cao của hình chóp tạo với đáy một góc 45^0 và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 2a.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO \perp (ABCD)$ suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD}$.

1) Gọi M là trung điểm CD, ta có: $CD \perp (SMO)$

Do đó góc $\widehat{SMO}$ là góc giữa mặt bên với mặt đáy, nên $\widehat{SMO} = 60^0$

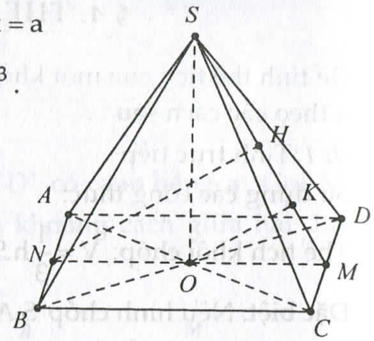
Đặt $AB = 2x \Rightarrow MO = x, OC = x\sqrt{2}$

Trong các tam giác vuông SOC, SOM ta có:

$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 5a^2 - 2x^2$; $SO = OM.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$

Nên ta có phương trình: $5a^2 - 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = a$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}.(2x)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}x^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.



2) Gọi K là hình chiếu của O lên AM,

ta có $OK \perp (SCD)$ nên $\widehat{OSK}$ là góc giữa đường cao SO với mặt bên nên $\widehat{OSK} = 45^0$.

Gọi N là trung điểm AB.

Do $AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(N,(SCD)) = NH = 2a$

Trong đó $HN//OK \Rightarrow OK = \frac{1}{2}NH = a$

Các tam giác SKO, SOM là các tam giác vuông cân nên ta có

$SO = OK\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, $OM = SO = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}\left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 2.4.2. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Tính thể tích của khối chóp S.ABC trong các trường hợp sau

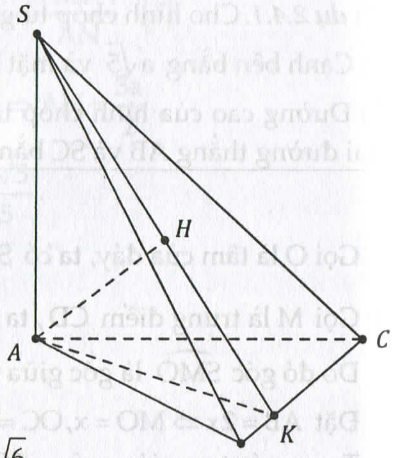
1) Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0

2) A cách mặt phẳng (SBC) một khoảng bằng $\frac{a}{4}$.

Lời giải.

Ta có $BC = 2a$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

và $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}SA$



1) Gọi K là hình chiếu của A lên BC,

ta có $BC \perp (SAK)$.

Suy ra $\widehat{SKA} = \left((SBC),(ABC)\right) = 60^0$.

Ta có: $AK = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

nên $SA = AK.\tan 60^0 = \frac{a}{2}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

2) Gọi H là hình chiếu của A lên SK, ta có $AH \perp (SBC)$

Trong tam giác SAK, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AK^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow SA = \frac{a}{2}$$

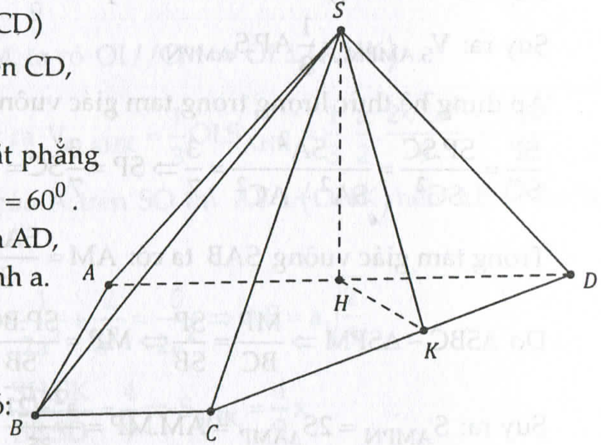
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 2.4.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 4a. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm đoạn AD,

ta có $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$



Gọi K là hình chiếu của H lên CD,

ta có $CD \perp (SKH)$.

Suy ra $\widehat{SKH}$ là góc giữa mặt phẳng (SCD) với mặt đáy, do đó $\widehat{SKH} = 60^0$.

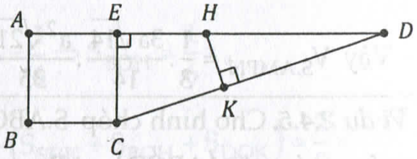
Gọi E là hình chiếu của C lên AD, suy ra ABCD là hình vuông cạnh a.

Ta có:

$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = a\sqrt{10}$

Do $\Delta CED \sim \Delta HKD$ nên ta có:

$\frac{HK}{CE} = \frac{KD}{DE}$



$\Rightarrow HK = \frac{KD.CE}{DE} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2}.a}{3a} = \frac{a\sqrt{10}}{6}$

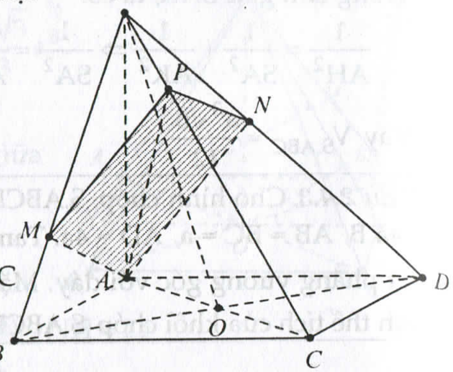
Suy ra $SH = HK\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{30}}{6}$, $S_{ABCD} = \frac{AB(AD+BC)}{2} = \frac{5a^2}{2}$

Vậy thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{5a^3\sqrt{30}}{12}$.

Ví dụ 2.4.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích khối chóp S.AMPN.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, ta có $BD \perp (SOA)$



suy ra góc $\widehat{SOA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt đáy nên $\widehat{SOA}=60^0$.

Trong tam vuông SAO ta có:

$SA = AO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$,

từ đó suy ra: $SC \perp (AMN)$

Nên AP là đường cao của hình chóp S.AMPN

Suy ra: $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}AP.S_{AMPN}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{SP}{SC} = \frac{SP.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2+AC^2} = \frac{3}{7} \Rightarrow SP = \frac{3}{7}SC = \frac{3a\sqrt{14}}{14}$$

Trong tam giác vuông SAB ta có: $AM = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Do $\Delta SBC \sim \Delta SPM \Rightarrow \frac{MP}{BC} = \frac{SP}{SB} \Rightarrow MP = \frac{SP.BC}{SB} = \frac{3a\sqrt{35}}{35}$

Suy ra: $S_{AMPN} = 2S_{\Delta AMP} = AM.MP = \frac{a^2\sqrt{21}}{35}$.

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{14}}{14}.\frac{a^2\sqrt{21}}{35} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{70}$.

Ví dụ 2.4.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với $(ABCD)$, $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh: $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích của khối chóp OHAK theo a.

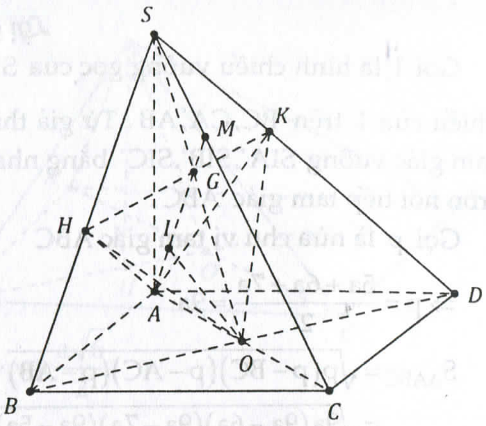
Lời giải

Ta có : $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. Tương tự $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

Do $\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}, \frac{SK}{SD} = \frac{SK.SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK//BD$ và $HK = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$.



Gọi G là giao điểm của SO và KH thì G là trung điểm của KH, mà

$AH = AK = \sqrt{\frac{2}{3}}a \Rightarrow AG \perp HK$.

Dễ thấy G là trọng tâm của ΔSAC:

nên $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}SC = \frac{2a}{3}$

(M là trung điểm của SC).

Vậy $S_{AHK} = \frac{1}{2}AG.HK$

$= \frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{2\sqrt{2}a}{3} = \frac{2\sqrt{2}a^2}{9}$

Gọi I là trung điểm của AM, ta có $OI//CM \Rightarrow OI \perp (AHK)$

và $OI = \frac{CM}{2} = \frac{SC}{4} = \frac{a}{2}$. Suy ra $V_{O.AHK} = \frac{1}{3}OI.S_{AHK} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{2\sqrt{2}a^2}{9} = \frac{\sqrt{2}a^3}{27}$.

Cách 2: Gọi E là hình chiếu của A trên SO thì $AE \perp (OHK)$ nên AE là đường cao của hình chóp A.OHK

Ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AE = a\sqrt{\frac{2}{5}}$

Đặt $S_{SBD} = x$, ta có $\frac{S_{SHK}}{S_{SBD}} = \frac{SH.SK}{SB.SD} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{SHK} = \frac{4}{9}x$

$\frac{S_{BOH}}{S_{SBD}} = \frac{BH.BO}{BS.BD} = \frac{1}{2}.\frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{1}{2}\frac{BA^2}{BS^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{BOH} = \frac{1}{6}x$,

Tương tự $S_{DOK} = \frac{1}{6}x \Rightarrow S_{OHK} = S_{SBD} - (S_{SHK} + S_{BOH} + S_{DOK}) = \frac{2}{9}x$

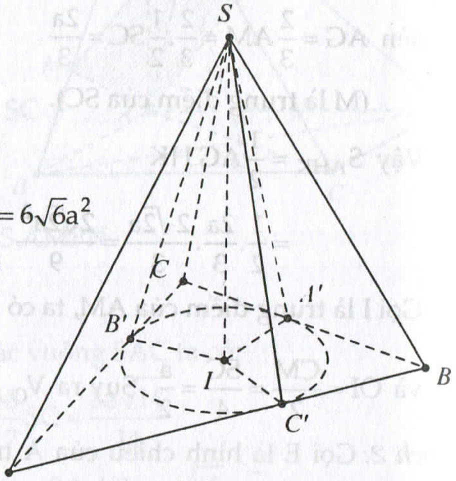
Mà $S_{SBD} = \frac{1}{2}SO.BD = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2+AO^2}.BD = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{2}}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow S_{OHK} = \frac{a^2\sqrt{5}}{9}$. Vậy $V_{AOHK} = \frac{1}{3}AE.S_{OHK} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}a.\frac{a^2\sqrt{5}}{9} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

Ví dụ 2.4.6. Cho hình chóp S.ABC có các cạnh đáy AB = 5a, BC = 6a, AC = 7a. Các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau và bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC). Biết hình chiếu của đỉnh S thuộc miền trong tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC), A',B',C' lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB. Từ giả thiết suy ra $\widehat{SA'I}=\widehat{SB'I}=\widehat{SC'I}=60^0$. Các tam giác vuông SIA', SIB', SIC' bằng nhau nên $IA'=IB'=IC' \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC

$$\Rightarrow p=\frac{5a+6a+7a}{2}=9a$$

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)}$$

$$=\sqrt{9a(9a-6a)(9a-7a)(9a-5a)}=6\sqrt{6}a^2$$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có:

$$S_{ABC}=pr \Rightarrow r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{6\sqrt{6}a^2}{9a}=\frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

$$\Rightarrow IA'=r=\frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

Ta có: $SI=IA'\tan 60^0=\frac{2\sqrt{6}a}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{2}a$

Suy ra $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SI.S_{ABC}=\frac{1}{3}2\sqrt{2}a.6\sqrt{6}a=8\sqrt{3}a^3$.

Ví dụ 2.4.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = SB = SC = a. Tính SD theo a để khối chóp S.ABCD có thể tích lớn nhất.

Lời giải.

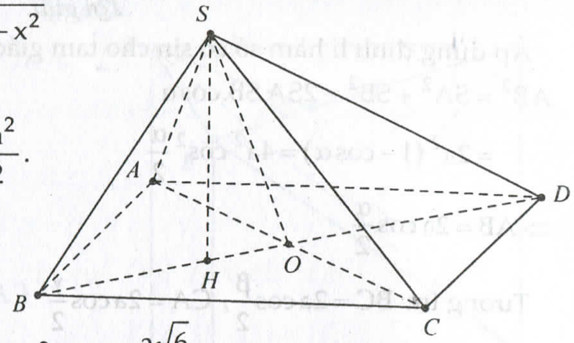
Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, ta suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên H thuộc BD.

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow O = BD \cap AC$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD), mà $AS = AB = AD = a \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $SBD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S. Đặt $SD = x$

Ta có: $SH.BD = SB.SD \Rightarrow SH=\frac{SB.SD}{BD}$ và $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD$

Nên $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{SB.SD}{BD}.\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{3}AB.SD.OA$

Mà $OA^2=AB^2-\frac{BD^2}{4}=a^2-\frac{a^2+x^2}{4}=\frac{3a^2-x^2}{4}$



Do đó: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{6}.a.x.\sqrt{3a^2-x^2}$

Áp dụng bđt Cô si ta có:

$$x\sqrt{3a^2-x^2}\le\frac{x^2+3a^2-x^2}{2}=\frac{3a^2}{2}.$$

Suy ra:

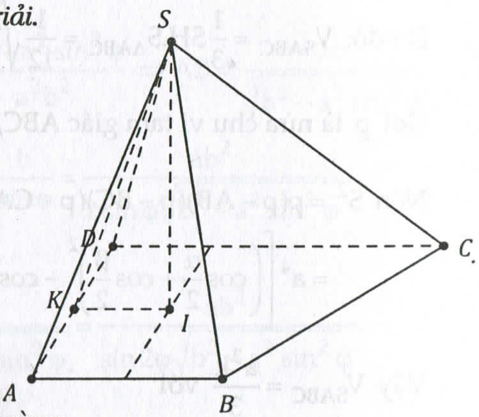
$$V_{S.ABCD}\le\frac{1}{6}.a.\frac{3a^2}{2}=\frac{a^3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2=3a^2-x^2 \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ví dụ 2.4.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều có cạnh bằng 2a, BC = 3a. Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD .

Lời giải.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên$(ABCD)$, tương tự như ví dụ trên ta cũng có I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang ABCD .

Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp nên $AB + DC = AD + BC = 5a$

Diện tích hình thang ABCD là

$$S=\frac{1}{2}(AB+DC)AD=\frac{1}{2}.5a.2a=5a^2$$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang ABCD thì

$$p=\frac{AB+DC+AD+BC}{2}=\frac{10a}{2}=5a \text{ và } S=pr \Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{5a^2}{5a}=a \Rightarrow IK=r=a.$$

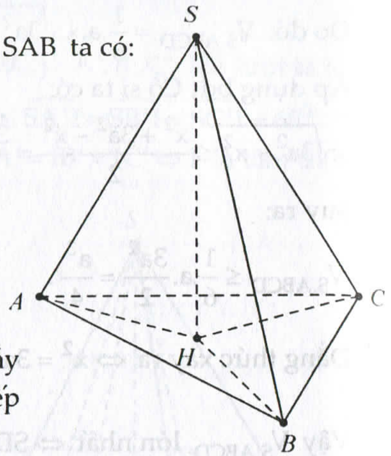
Tam giác SAD đều và có cạnh 2a nên

$$SK=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow SI=\sqrt{SK^2-IK^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$$

Vậy $V=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.5a^2=\frac{5\sqrt{2}a^3}{3}$.

Ví dụ 2.4.9. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB}=\alpha$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{CSA}=\gamma$. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a,α,β,γ .

Lời giải.



Áp dụng định lí hàm số cô sin cho tam giác SAB ta có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\alpha$$

$$= 2a^2(1-\cos\alpha) = 4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$$

Tương tự: $BC = 2a\cos\frac{\beta}{2}$, $CA = 2a\cos\frac{\gamma}{2}$

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy (ABC), ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nên $AH = \frac{AB.BC.CA}{4S}$, $S = S_{\Delta ABC}$

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{16a^2S^2 - (AB.BC.CA)^2}}{4S}$

Do đó: $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}\sqrt{16a^2S^2 - 64a^6\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, ta có: $p = a\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right)$

Nên $S^2 = p(p-AB)(p-BC)(p-CA)$

$$= a^4\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right]\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right] \quad (*)$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{a^3k}{3}$ với

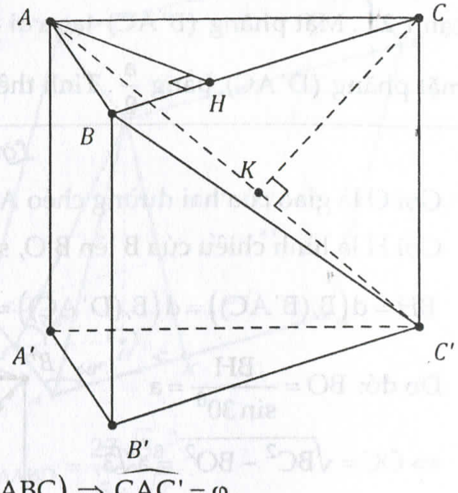
$$k = \sqrt{\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right]\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right] - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

Ví dụ 2.4.10. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến (BCC'B') bằng a, khoảng cách từ C đến (ABC') bằng b, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng φ.

1) Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a, b và φ.

2) Khi a = b không đổi, hãy xác định φ để thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' nhỏ nhất.

Lời giải.



1) Hạ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$,

Vì $AA' // (BCC'B')$

$\Rightarrow d(AA',(BCC'B'))$

$= d(A,(BCC'B')) = AH = a$

Hạ $CK \perp AC'$, vì $AB \perp AC$

và $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow AB \perp CK \Rightarrow CK \perp (ABC')$

$\Rightarrow CK = d(C,(ABC')) = b$.

Ta có $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow \widehat{CAC'}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(ABC) \Rightarrow \widehat{CAC'} = \varphi$.

$$AC = \frac{CK}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi},\ CC' = \frac{CK}{\cos\varphi} = \frac{b}{\cos\varphi}.$$

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{b^2 - a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2} \Rightarrow AB = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}.\frac{b}{\sin\varphi} = \frac{ab^2}{2\sin\varphi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}$$

Thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' là:

$$V = CC'.S_{\Delta ABC} = \frac{b}{\cos\varphi}\frac{ab^2}{2\sin\varphi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}} = \frac{ab^3}{\sin 2\varphi\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi}}$$

2) Khi $a = b \Rightarrow V = \frac{a^3}{2\sin\varphi\cos^2\varphi}$.

Do $(\sin\varphi\cos^2\varphi)^2 = \frac{1}{2}.2\sin^2\varphi.\cos^2\varphi.\cos^2\varphi \le \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi}{3}\right)^3$

$\Rightarrow \sin\varphi\cos^2\varphi \le \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \ge \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi \Leftrightarrow \tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy khi $\varphi = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì *V* đạt giá trị nhỏ nhất.

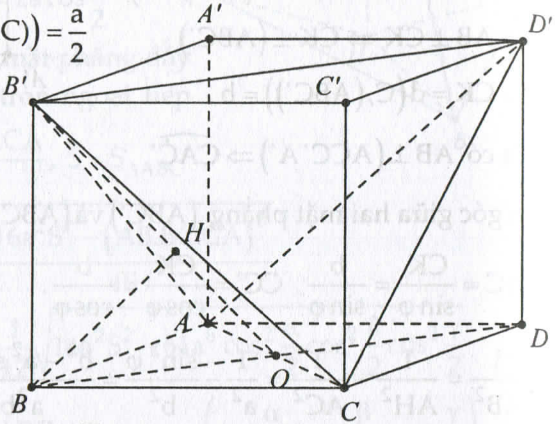
Ví dụ 2.4.10. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh 2a . Mặt phẳng (B'AC) tạo với đáy một góc 30^0 , khoảng cách từ B đến mặt phẳng (D'AC) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.

Lời giải.

Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD, ta có $AC\perp(B'OB)\Rightarrow\widehat{B'OB}=30^0$

Gọi H là hình chiếu của B lên B'O, suy ra:

$BH=d\left(B,(B'AC)\right)=d\left(B,(D'AC)\right)=\frac{a}{2}$



Do đó: $BO=\frac{BH}{\sin 30^0}=a$

$\Rightarrow OC=\sqrt{BC^2-BO^2}=a\sqrt{3},$

$BB'=BO\tan 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD$

$=2BO.CO=2a^2\sqrt{3}$

Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'}=BB'.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.2a^2\sqrt{3}=2a^3$

Mặt khác $V_{B'ABC}=V_{D'ACD}=V_{CB'C'D'}=V_{AA'B'C'}=\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'CD'}$

Nên suy ra $V_{ACB'D'}=\frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{2a^3}{3}$.

Ví dụ 2.4.11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các mặt bên và mặt (A'BD) hợp với đáy góc 60^0, biết góc $\widehat{BAD}=60^0$, $AB=2a$, $BD=a\sqrt{7}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABD), J, K là hình chiếu của H trên AB, AD.

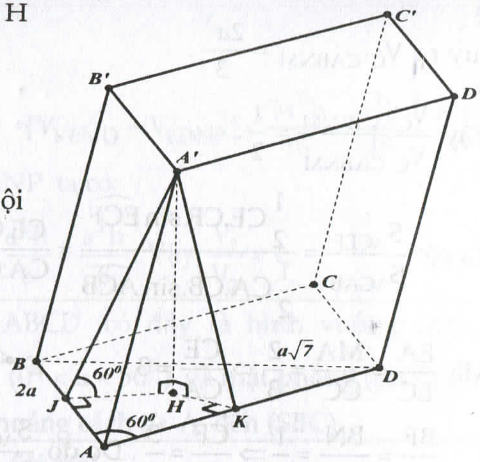
Áp dụng định lí cosin cho ΔABD: $BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD.\cos\widehat{BAD}$

$\Rightarrow AD^2-2a.AD-3a^2=0\Leftrightarrow AD=3a\Rightarrow S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

Từ giả thiết suy ra hình chóp A'.ABD có các mặt bên hợp đáy góc 60^0

Nên H là cách đều các cạnh của ΔABD

TH 1: Nếu H nằm trong ΔABD thì H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABD.



Góc giữa mặt bên (ABB'A') và đáy bằng $\widehat{A'JH}=60^0$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABD thì:

$r=\frac{S_{\Delta ABD}}{p}=\frac{3\sqrt{3}a}{5+\sqrt{7}}$

$\Rightarrow A'H=r.\tan 60^0=\frac{9a}{5+\sqrt{7}}$

Từ đó,

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=6V_{A'.ABD}=6.\frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABD}=\frac{27\sqrt{3}a^3}{5+\sqrt{7}}$.

TH 2: Nếu H nằm ngoài ΔABD thì H là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAD}$ của ΔABD.

Gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp ΔABD tương ứng thì :

$r_a=\frac{S_{\Delta ABD}}{p-BD}=\frac{3\sqrt{3}a}{5-\sqrt{7}}\Rightarrow A'H=r.\tan 60^0=\frac{9a}{5-\sqrt{7}}$

Từ đó, $V_{ABCD.A'B'C'D'}=6V_{A'.ABD}=6.\frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABD}=\frac{27\sqrt{3}a^3}{5-\sqrt{7}}$

Ví dụ 2.4.12. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng thể tích khối lập phương cạnh a. Trên các cạnh AA', BB' lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{BN}{BB'}=\frac{1}{3}$.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CM với C'A' và CN với C'B'.

1) Mặt phẳng (CMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

2) Tính thể tích khối chóp C'CEF.

Lời giải.

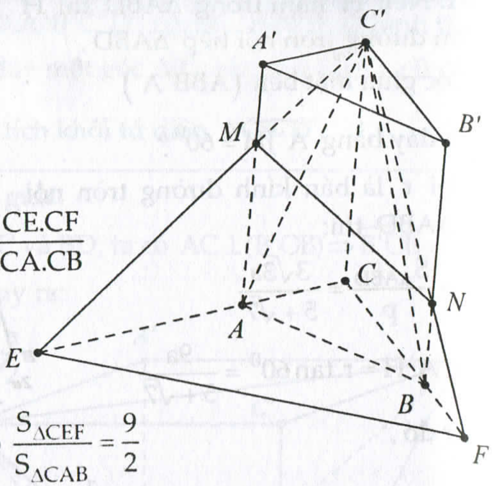
Ta có $V_{ABC.A'B'C'}=a^3$.

1) Do $V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$. Suy ra $V_{C'ABB'A'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2a^3}{3}$

Mặt khác $S_{ABNM}=S_{A'B'NM}\Rightarrow V_{C'A'B'NM}=\frac{1}{2}V_{C'ABB'A'}=\frac{a^3}{3}$

Suy ra $V_{C'CABNM}=\frac{2a^3}{3}$.

Vậy $\frac{V_{C'A'B'NM}}{V_{C'CABNM}}=\frac{1}{2}$.



2) Ta có: $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{\frac{1}{2}CE.CF.\sin\widehat{ECF}}{\frac{1}{2}CA.CB.\sin\widehat{ACB}}=\frac{CE.CF}{CA.CB}$

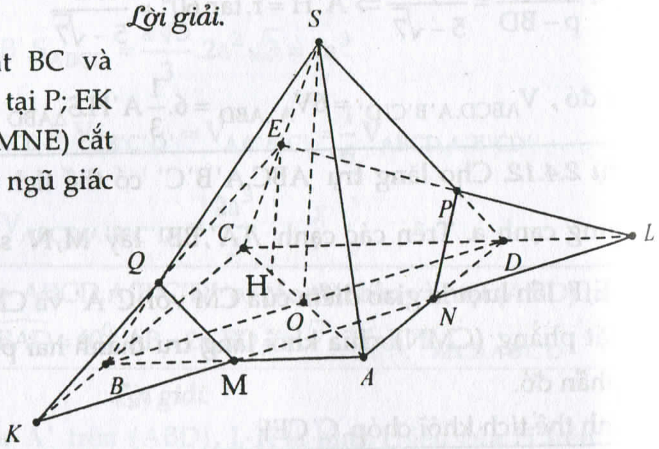
Mà $\frac{EA}{EC}=\frac{MA}{CC'}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{CE}{CA}=3$,

$\frac{BF}{BC}=\frac{BN}{CC'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{CF}{CB}=\frac{3}{2}$. Do đó $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{9}{2}$

Suy ra $C_{C'CEF}=\frac{9}{2}V_{C'CAB}=\frac{3a^3}{2}$.

Ví dụ 2.4.13. Cho hình chóp đều S.ABCD có M,N,E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, SC. Tính tỷ số thể tích hai phần của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (MNE).

Lời giải.



Đường thẳng MN cắt BC và CD tại K và L; EL cắt SD tại P; EK cắt SB tại Q. Mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp theo mặt cắt là ngũ giác NMPEQ.

Đặt $AB=a, SO=h$.

Ta có $KB=DL=\frac{a}{2}$.

Hạ $EH//SO\Rightarrow EH$ là đường trung bình của ΔSOC nên $EH=\frac{h}{2}$.

$S_{\Delta CKL}=\frac{1}{2}CK.CL=\frac{1}{2}\frac{3a}{2}\frac{3a}{2}=\frac{9a^2}{8}$; $V_{ECKL}=\frac{1}{3}EH.S_{CKL}=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{9a^2}{8}=\frac{3a^2h}{16}$.

Ta có Q là trung điểm của EK nên

$$\frac{V_{KBQM}}{V_{KCEL}}=\frac{KB.KQ.KM}{KC.KE.KL}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{18}\Rightarrow V_{KBQM}=\frac{1}{18}V_{KCEL}=\frac{a^2h}{96}$$

Tương tự $V_{LNDP}=\frac{a^2h}{96}$

Suy ra $V_1=V_{BCDNMQEP}=V_{ECKL}-[V_{KBMQ}+V_{LDNP}]=\frac{3a^2h}{16}-\frac{a^2h}{48}=\frac{a^2h}{6}$

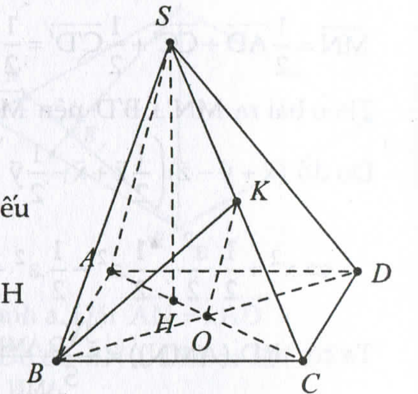
Gọi V_2 là phần thể tích SEQMANP ta có:

Suy ra $V_2=V_{SABCD}-V_1=\frac{a^2h}{3}-\frac{a^2h}{6}=\frac{a^2h}{6}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=1$.

Ví dụ 2.4.14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $\widehat{ASC}=90^0$, SA lập với đáy góc α $(0^0<\alpha<90^0)$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Lời giải.

Ta có $V_{A.SBC}=\frac{1}{3}d(A,(SBC)).S_{BCS}$



nên $d(A,(SBC))=\frac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}$.

Vì $(SAC)\perp(ABC)$ nên gọi H là hình chiếu của S trên cạnh AC thì $SH\perp(ABC)$, hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABCD) là AH nên $(SA,(ABCD))=\widehat{SAH}=\alpha$.

Ta có $\widehat{ASC}=90^0$ nên $SA=AC.\cos\alpha=\sqrt{2}.a.\cos\alpha$,

Do đó $SH=SA.\sin\alpha=\sqrt{2}.a.\cos\alpha\sin\alpha$

Nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha$.

Gọi K là trung điểm của SC thì OK là đường trung bình của tam giác SAC nên $OK//SA\Rightarrow OK\perp SC$. Mà $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$ nên $BK\perp SC$.

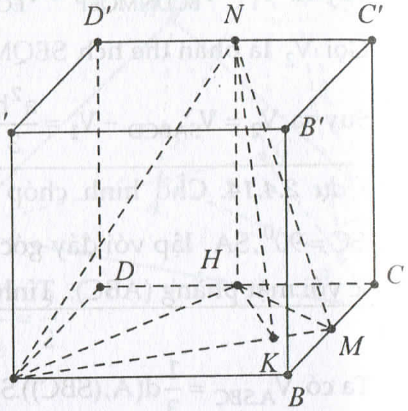
Ta có $SC=AC.\sin\alpha=\sqrt{2}.a.\sin\alpha$ nên $BK=\sqrt{BC^2-CK^2}=a\sqrt{\frac{2-\sin^2\alpha}{2}}$

$\Rightarrow S_{BCS}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d(A,(SBC))=\frac{3.\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha.}{\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{2}.a.\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\alpha}}$.

Ví dụ 2.4.15. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, tam giác ABD là tam giác đều. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, C'D'$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (AMN) biết rằng $MN \perp B'D$.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}, \overrightarrow{AB} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$.

Ta có tam giác ABD là tam giác đều nên :

$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = 0, \vec{y}.\vec{z} = |\vec{y}||\vec{z}|.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$.

Vì M, N là trung điểm của BC, C'D'

nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$ hay

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} = \frac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

Theo bài ra $MN \perp B'D$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB'} = \vec{0}$

Do đó $(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})\left(\frac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}.a^2 - \frac{1}{2}.a^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Ta có: $d(D,(AMN)) = \frac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}}$. Dễ thấy $S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Gọi H là trung điểm của DC thì $NH \perp (ABCD), NH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ nên

$$V_{D.AMN} = V_{N.AMD} = \frac{1}{3}NH.S_{AMD} = \frac{\sqrt{6}}{24}a^3.$$

Kẻ $HK \perp AM$ ta có $NK \perp AM$. Theo định lí hàm số cosin

$$AM^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos 120^0 = \frac{7}{4}a^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

Ta có $S_{AHM} = S_{ABCD} - (S_{ADH} + S_{CHM} + S_{ABM}) = \frac{3}{8}S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$

Nên $HK = \frac{2S_{AHM}}{AM} = \frac{3\sqrt{21}}{28}a \Rightarrow NK = \sqrt{NH^2 + HK^2} = \frac{\sqrt{231}}{14}a$.

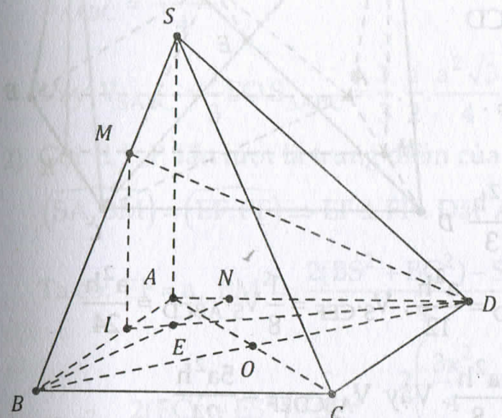
Suy ra $S_{AMN} = \frac{1}{2}NK.AM = \frac{\sqrt{33}}{8}a^2$, do đó $d(D,(AMN)) = \frac{\sqrt{22}}{11}a$.

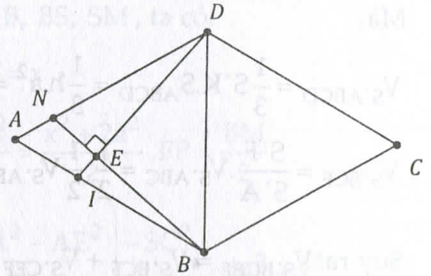
Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (AMN) là $\frac{\sqrt{22}}{11}a$.

Bài tập

Bài 2.4.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và $AB = BD = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $BM = \frac{2}{3}SB$, giả sử N là điểm di động trên cạnh AD. Tìm vị trí của điểm N để $BN \perp DM$ và khi đó tính thể tích của khối tứ diện BDMN.

Hướng dẫn giải





Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABD đều cạnh a. Đặt $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AD}$

Vẽ $MI // SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \Rightarrow MI \perp BN$. Do đó $BN \perp DM \Leftrightarrow BN \perp DI$

Ta có: $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}AB^2 - xAD^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x\right)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$$= -\frac{1}{3}a^2 - xa^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x\right)a^2 = -\frac{5}{6}a^2x + \frac{1}{6}a^2$$

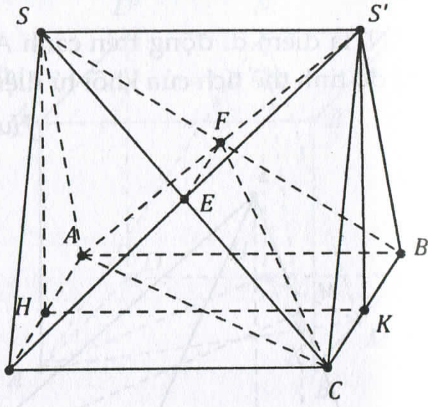
Do đó $DI \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow AN = \frac{1}{5}a$.

Ta có: $MI = \frac{2}{3}SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}, S_{\Delta BND} = \frac{4}{5}S_{\Delta ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{5}$.

Vậy $V_{M.BDN} = \frac{1}{3}MI.S_{\Delta BND} = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{5} = \frac{2a^3}{15}$.

Bài 2.4.2. Cho hai khối chóp S.ABCD và S'.ABCD có chung đáy ABCD là một hình vuông cạnh a (S và S' nằm về cùng một phía của (ABCD)). Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC, biết $SH = S'K = h$ và SH, S'K cùng vuông góc với $(ABCD)$. Tính thể tích phần chung của hai khối chóp S.ABCD và S'.ABCD theo a và h.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết đề bài, ta suy ra các tứ giác SDCS', SABS' là các hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là tâm của các hình bình hành SDCS', SABS'. Ta có phần chung của hai khối chóp S.ABCD và S'.ABCD là khối đa diện: ABCDEF.

Ta có: $V_{ABCDEF} = V_{S'ABCD} - V_{S'BCEF}$.

Mà:

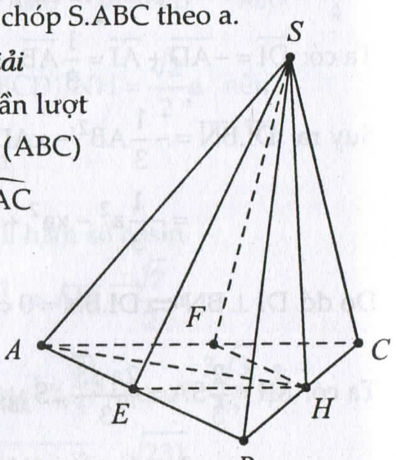
$$V_{S'ABCD} = \frac{1}{3}S'K.S_{ABCD} = \frac{1}{3}h.a^2 = \frac{a^2h}{3}$$

$$V_{S'BCF} = \frac{S'F}{S'A}.V_{S'ABC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{S'ABCD} = \frac{a^2h}{12},\ V_{S'CEF} = \frac{1}{8}V_{S'ABCD} = \frac{a^2h}{24}$$

Suy ra $V_{S'BCEF} = V_{S'BCF} + V_{S'CEF} = \frac{a^2h}{8}$. Vậy $V_{ABCDEF} = \frac{5a^2h}{24}$.

Bài 2.4.3. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = 2a. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60°. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của S lên BC; E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC suy ra $SH \perp (ABC)$ và HE = HF nên AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$

Ta có: $\frac{AB}{HF} = \frac{BC}{HC} = 1 + \frac{BH}{CH} = 1 + \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow HF = \frac{AB.AC}{AB + AC} = \frac{2a}{3}$$

Suy ra $SH = HF.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$,

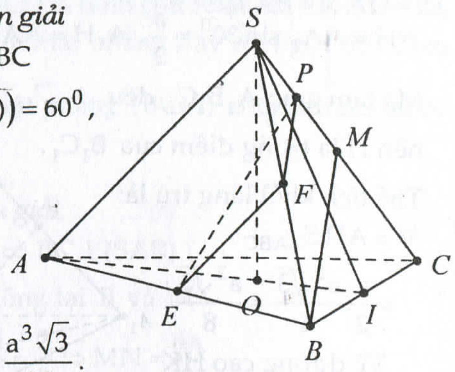
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = a^2.\ \text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Bài 2.4.4. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Tính thể tích khối chóp S.ABC biết:

1) Cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 60^0

2) Cạnh bên bằng 2a và $SA \perp BM$, với M là trung điểm SC.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm của đáy, I là trung điểm BC

1) Ta có $BC \perp (SIO) \Rightarrow \widehat{SIO} = \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = 60^0$,

$$IO = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SO = IO\tan 60^0 = \frac{a}{2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

2) Gọi E, F, P lần lượt là trung điểm của AB, BS, SM, ta có:

$\left(\widehat{SA,BM}\right) = \left(\widehat{EF,PF}\right) \Rightarrow EF \perp FP$. Đặt AB = x

Ta có: $EF = a,\ BM^2 = \frac{2(BS^2 + BC^2) - SC^2}{4} = \frac{x^2 + 2a^2}{2}, FP = \frac{BM}{2}$

$$EM^2 = \frac{2(EC^2 + ES^2) - SC^2}{4} = \frac{2\left(\frac{3x^2}{4} + SA^2 - AE^2\right) - SC^2}{4} = \frac{4a^2 + x^2}{4}$$

$$EP^2 = \frac{2(SE^2 + EM^2) - SM^2}{4} = \frac{9a^2}{16}$$

Tam giác EFP vuông tại F nên $EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{2}$

$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \frac{2a\sqrt{3}}{9}\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^3}{3}$.

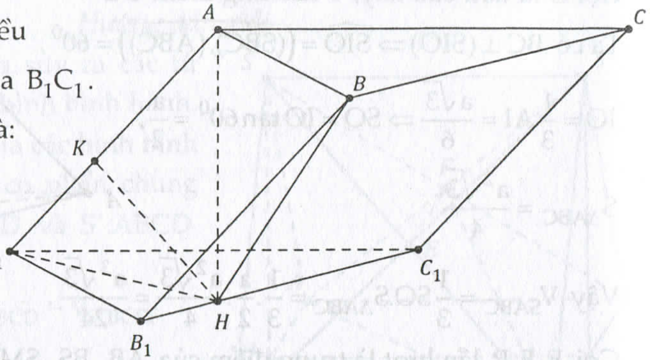
Bài 2.4.5. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ thuộc đoạn thẳng B_1C_1. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và B_1C_1 theo a.

Hướng dẫn giải

Ta có A_1H là hình chiếu của AA_1 lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ nên suy ra $\widehat{AA_1H} = 30^0$

Xét tam giác vuông AHA_1 ta có:

$AH = AA_1.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$, $A_1H = AA_1.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



Mà tam giác $A_1B_1C_1$ đều nên H là trung điểm của B_1C_1.

Thể tích khối lăng trụ là:

$V = AH.S_{\Delta ABC}$

$= \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

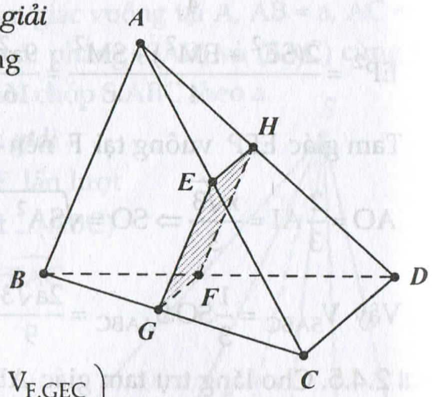
Vẽ đường cao HK của tam giác AHA_1.

Ta có $B_1C_1 \perp (AHA_1)$ nên $B_1C_1 \perp HK$

Suy ra $d(AA_1, B_1C_1) = HK = \frac{AH.A_1H}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 2.4.6. Cho tứ diện gần đều ABCD (có các cặp cạnh đối bằng nhau) và mặt phẳng (α) luôn song song với AB và CD. Tìm vị trí của (α) để (α) chia tứ diện thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Vì các mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau nên các đường cao bằng nhau.

Mặt phẳng (α) song song với AB và CD nên $FG//HE//DC$ và $EG//FH//AB$.

Ta cần tìm vị trí của $mp(\alpha)$ để

$V_{F.HDCE} + V_{F.GCE} = V_{F.AEGB} + V_{F.AHE}$

$\Leftrightarrow V_{F.ADC} - 2.V_{F.AHE} = V_{F.ABC} - 2.V_{F.GEC}$

$\Leftrightarrow V_{A.FDC}\cdot\left(1 - 2.\frac{V_{F.AHE}}{V_{F.AHE}}\right) = V_{A.FBC}\cdot\left(1 - 2.\frac{V_{F.GEC}}{V_{F.ABC}}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{FDC}}{S_{FBC}} = \frac{1 - 2.\frac{S_{GEC}}{S_{ABC}}}{1 - 2.\frac{S_{AHE}}{S_{AHE}}} \Leftrightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{1 - 2.(\frac{EC}{EA})^2}{1 - 2\left(\frac{AH}{AD}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{HD}{AH} = \frac{AD^2 - 2.HD^2}{AD^2 - 2.AH^2} \Leftrightarrow (HD - HA)^3 = 0$$

$\Leftrightarrow$ Mặt phẳng α đi qua trung điểm của cạnh AD.

Bài 2.4.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN.

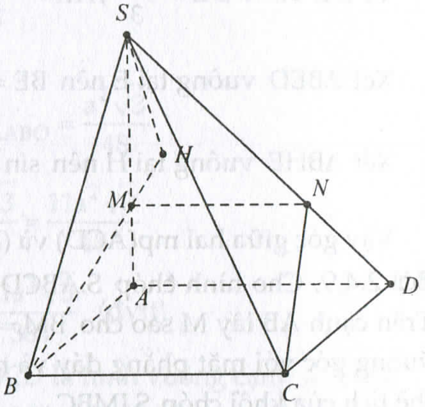
Hướng dẫn giải

Ta có: $MN//AD; BC \perp SA$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp BM \Rightarrow BCMN$ là hình thang vuông tại B và M.

Ta có: $SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$, $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{4a}{3}$,

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



Diện tích hình thang BCMN:

$$S = \frac{BC + MN}{2}BM = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$$

Hạ $SH \perp BM \Rightarrow SH \perp (BCMN) \Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp S.BCMN.

Do $\Delta MHS \sim \Delta MAB$ nên suy ra:

$$MH.MB = MS.MA \Rightarrow MH = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow BH = BM + MH = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

Vậy $V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}S.SH = \frac{1}{3}.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}}.a = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$.

Bài 2.4.8. Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD). Biết thể tích của khối tứ diện ABCD bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AE$.

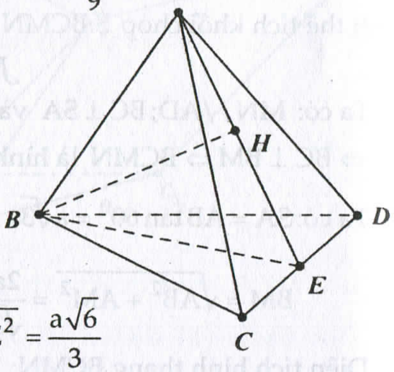
Ta có ΔACD cân tại A nên $CD \perp AE$. Tương tự $CD \perp BE$

Suy ra $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BH$

Mà $BH \perp AE \Rightarrow BH \perp (ACD) \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Gọi $\alpha = \widehat{((ACD),(BCD))}$.

Thể tích của khối tứ diện ABCD là $V = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta ACD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{27}$

$\Rightarrow S_{\Delta SCD} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AE.DE = \frac{a^2\sqrt{5}}{9} \Rightarrow AE^2.DE^2 = \frac{5a^4}{9}$



Mặt khác: $AE^2 + DE^2 = 2a^2 \Rightarrow AE^2, DE^2$ là hai nghiệm của phương trình

$x^2 - 2a^2x + \frac{5a^4}{9} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{3}, x = \frac{5a^2}{3}$.

Vì $DE < a \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AE = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

Xét ΔBED vuông tại E nên $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

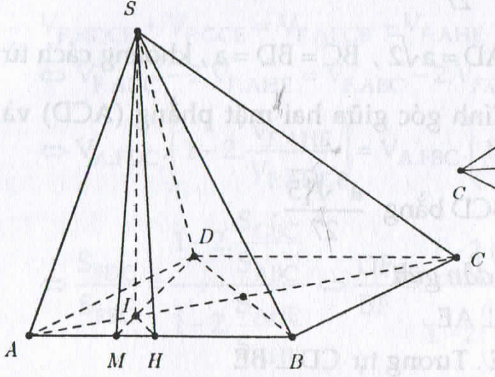
Xét ΔBHE vuông tại H nên $\sin\alpha = \frac{BH}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0$

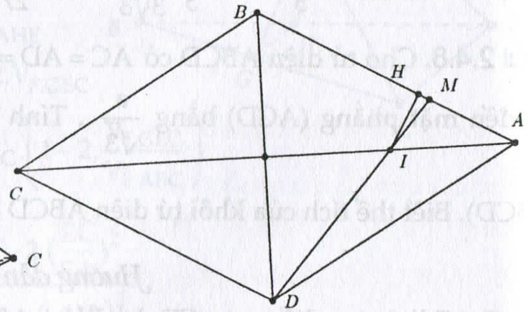
Vậy góc giữa hai mp(ACD) và (BCD) là $\alpha = 45^0$

Bài 2.4.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BD = a$. Trên cạnh AB lấy M sao cho $BM = 2AM$. Gọi I là giao điểm của AC và DM, SI vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60⁰. Tính thể tích của khối chóp S.IMBC.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của I lên AB, suy ra $AB \perp (SIH) \Rightarrow \widehat{SHI}$ là góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy. Do đó $\widehat{SHI} = 60^0$.





Do tam giác ABD đều nên suy ra $\widehat{ABD} = 60^0$ và $BD = \frac{2a}{3}$ nên áp dụng định lí cô sin cho tam giác BDM ta có:

$MD^2 = BM^2 + BD^2 - 2BM.BD.\cos 60^0 = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

Mặt khác: $\frac{MD}{\sin 60^0} = \frac{BM}{\sin \widehat{BDM}} \Rightarrow \sin \widehat{BDM} = \frac{BM.\sin 60^0}{MD} = \sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow \cos^2 \widehat{BDM} = \frac{4}{7}$

$\Rightarrow \tan \widehat{BDM} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \widehat{BDM}} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OI = OD.\tan \widehat{BDM} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow I$ là trung điểm AO

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{IH}{OB} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow IH = \frac{AI.OB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Suy ra $SI = IH \tan 60^0 = \frac{3a}{8}$

$\frac{S_{AMI}}{S_{\Delta ABO}} = \frac{AM}{AB}.\frac{AI}{AO} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{\Delta AMI} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABO} = \frac{a^2\sqrt{3}}{48}$

Do đó $S_{MICB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMI} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{11a^2\sqrt{3}}{48}$

Vậy $V_{SMICB} = \frac{1}{3}SI.S_{MICB} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{8}.\frac{11a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{384}$ (đvtt).

Bài 2.4.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trọng tâm của tam giác $ABD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

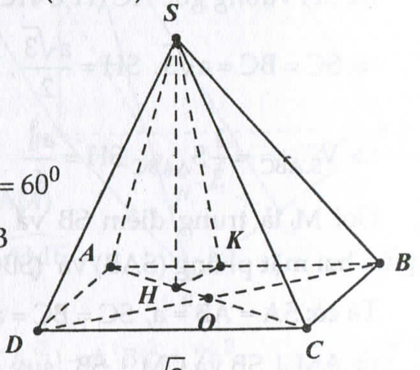
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^2}{3}.SH$

Kẻ $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow SK \perp AB$.

Suy ra $\widehat{((SAB),(ABCD))} = \widehat{(SK,HK)} = \widehat{SKH} = 60^0$

Gọi O là tâm của đáy, ta có $\Delta AKH \sim \Delta AOB$

$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{KH}{OB} \Rightarrow KH = \frac{AH.OB}{AB} = \frac{2}{3}\frac{OB^2}{AB} = \frac{a}{3}$

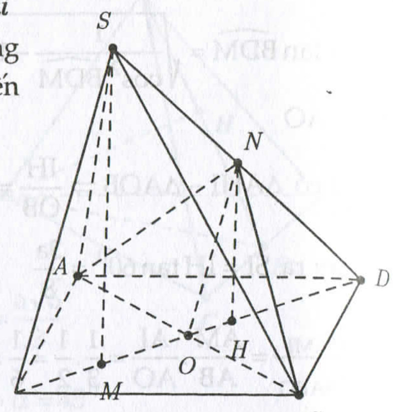


Trong tam giác vuông SHK ta có: $SH = HK.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Bài 2.4.11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, $AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh OB, SD. Mặt phẳng (NAC) tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0; hai mặt phẳng (SAM) và (SCM) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp S.ACN.

Hướng dẫn giải



Vì hai mặt phẳng (SAM) và (SCM) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên giao tuyến SM của hai mặt phẳng đó vuông góc với đáy.

Gọi H là trung điểm của MD

suy ra $NH // SM \Rightarrow NH \perp (ABCD)$

Do $DO \perp AC \Rightarrow AC \perp (NHO) \Rightarrow \widehat{NOH} = 60^0$

Ta có:

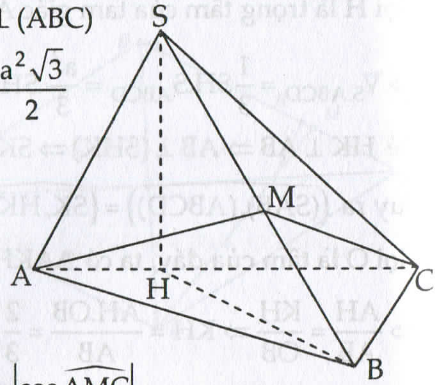
$$HD = \frac{1}{2}DM = \frac{3}{4}OD \Rightarrow HO = \frac{1}{4}OD = \frac{a\sqrt{2}}{8}$$

Trong tam giác vuông NHO, ta có: $NH = OH\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{6}}{8} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$$V_{NACD} = \frac{1}{2}V_{SACD} \Rightarrow V_{SACN} = \frac{1}{2}V_{SACD} = \frac{1}{6}SH.S_{\Delta ACD} = \frac{1}{6}\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

Bài 2.4.12. Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBC).

Hướng dẫn giải



Kẻ SH vuông góc AC $(H \in AC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\Rightarrow SC = BC = a\sqrt{3},\ SH = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{a^3}{4}$$

Gọi M là trung điểm SB và φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ta có: $SA = AB = a$, $SC = BC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AM \perp SB$ và $CM \perp SB$, suy ra $\cos\varphi = \left|\cos\widehat{AMC}\right|$

$$\Delta SAC = \Delta BAC \Rightarrow SH = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

AM là trung tuyến ΔSAB nên:

$$AM^2 = \frac{2AS^2 + 2AB^2 - SB^2}{4} = \frac{10a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Tương tự: $CM = \frac{a\sqrt{42}}{4} \Rightarrow \cos\widehat{AMC} = \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2.AM.CM} = -\frac{\sqrt{105}}{35}$

Vậy: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{105}}{35}$

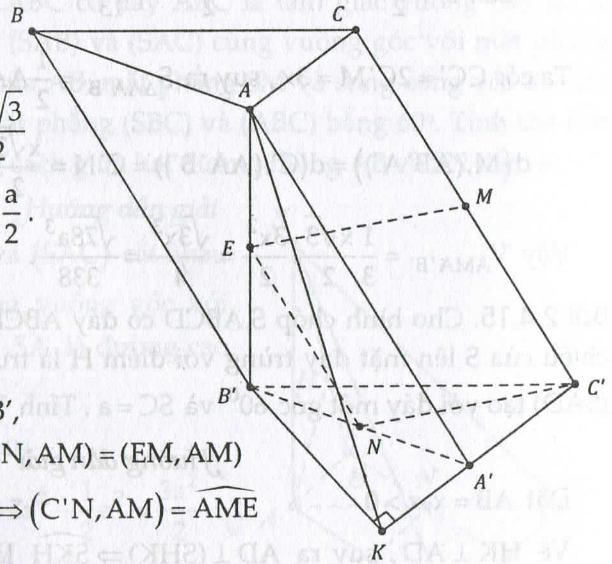
Bài 2.4.13. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^0$ và AB' vuông góc với đáy (A'B'C'). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và A'B', mặt phẳng (AA'C') tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và cô sin của góc giữa hai đường thẳng AM và C'N.

Hướng dẫn giải

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

Gọi K là hình chiếu của B′ lên A′C′, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó $\widehat{AKB'} = \left(\widehat{(A'B'C'),(AA'C')}\right) = 30^0$



Trong tam giác A'KB'

có $\widehat{KA'B'} = 60^0, A'B' = a$,

nên $B'K = A'B'\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $AB' = B'K.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ:

$$V = AB'.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Gọi E là trung điểm của AB′,

suy ra $ME // C'N$, nên $(C'N, AM) = (EM, AM)$

Vì $AB' \perp C'N \Rightarrow AE \perp EM \Rightarrow (C'N, AM) = \widehat{AME}$

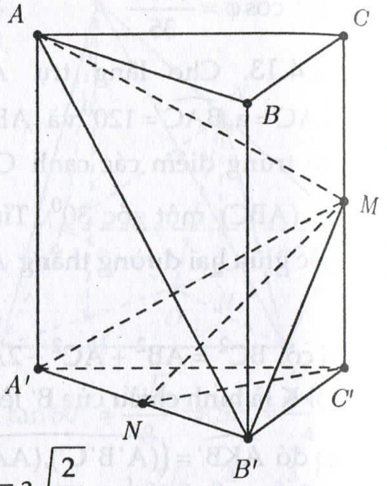
Ta có:

$$AE = \frac{1}{2}AB' = \frac{a}{4}; EM^2 = C'N^2 = \frac{2(C'B'^2 + C'A'^2) - A'B'^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$AM^2 = AE^2 + EM^2 = \frac{29a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{29}}{4}$. Vậy $\cos\widehat{AME} = \frac{ME}{MA} = 2\sqrt{\frac{7}{29}}$.

Bài 2.4.14. Cho hình lăng trụ đều ABC.A′B′C′, M là trung điểm của cạnh CC′. Mặt phẳng (A′B′M) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0 và tam giác A′MB′ có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{13}$. Tính thể tích khối chóp $AMA'B'$.

Hướng dẫn giải



Gọi N là trung điểm của A′B′, ta có $CN \perp A'B'$

Mặt khác: $A'M = B'N \Rightarrow MN \perp A'B'$, suy ra $A'B' \perp (MNC')$

Do đó $\widehat{MNC'}$ là góc giữa mặt phẳng (A′MN) với (A′B′C′).

Nên $\widehat{MNC'} = 60^0$. Đặt $AB = x$

Suy ra: $CN = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MC' = C'N\tan 60^0 = \frac{3x}{2}$

$\Rightarrow MN = x\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta MA'B'} = \frac{1}{2}MN.A'B' = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{13} \Rightarrow x = a\sqrt{\frac{2}{13}}$.

Ta có: $CC' = 2C'M = 3x$, suy ra $S_{\Delta AA'B'} = \frac{1}{2}AA'.A'B' = \frac{3x^2}{2}$

$$d\left(M,(AB'A')\right) = d(C',(AA'B')) = C'N = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{AMA'B'} = \frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2}.\frac{3x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}x^3}{4} = \frac{\sqrt{78}a^3}{338}$.

Bài 2.4.15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của AO. Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60^0 và $SC = a$. Tính $V_{S.ABCD}$ và $d(AB, SC)$.

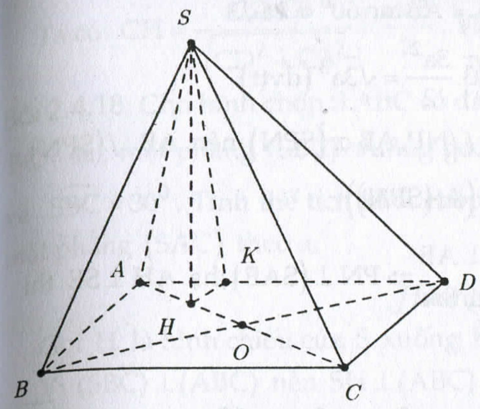
Hướng dẫn giải

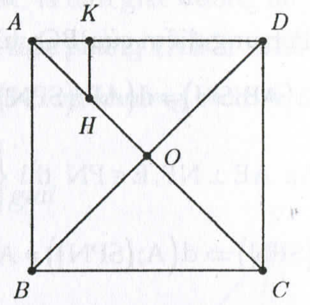
Đặt $AB = x, x > 0$

Vẽ $HK \perp AD$, suy ra $AD \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH}$ là góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^0$

Ta có: $HC = \frac{3}{4}AC = \frac{3x\sqrt{2}}{4}$; $HK = \frac{3}{4}DC = \frac{3x}{4}$.

Trong tam giác vuông SHC, ta có: $SH^2 = SC^2 - HC^2 = a^2 - \frac{9x^2}{8}$





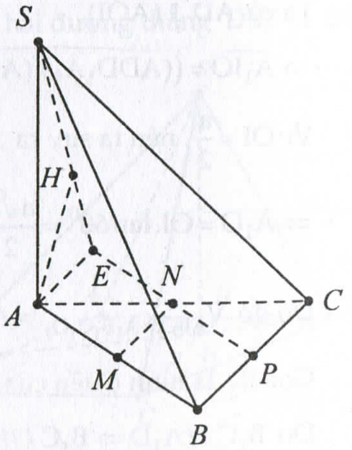
Trong tam giác vuông SHK, ta có: $SH = HK\tan 60^0 = \frac{3x\sqrt{3}}{4}$

Dẫn tới $\frac{27x^2}{16} = a^2 - \frac{9x^2}{8} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16a^2}{45} \Rightarrow x = \frac{4a}{3\sqrt{5}}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{3x\sqrt{3}}{4}.x^2 = \frac{\sqrt{3}x^3}{4} = \frac{16\sqrt{15}a^3}{675}$.

Bài 2.4.16. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Hướng dẫn giải



Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp (ABC)$, hay SA là đường cao của khối chóp S.BCNM.

Ta có : $S_{BCNM} = S_{ABC} - S_{AMN}$

$= 2a^2 - \frac{1}{2}MA.MN = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp BC$.

Nên $\widehat{SBA}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), thế thì theo giả thiết ta có $\widehat{SBA} = 60^0$.

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = \sqrt{3}a^3$ (dvtt)

Gọi P là trung điểm của BC thì $AB//NP, AB \not\subset (SPN)$ nên $AB//(SPN)$

do đó $d(AB,SN) = d(AB;(SPN)) = d(A;(SPN))$

Từ A hạ $AE \perp NP, E \in PN$ thì $\begin{cases} PN \perp AE \\ PN \perp SA \end{cases} \Rightarrow PN \perp (SAE)$;hạ $AH \perp SE$ thì

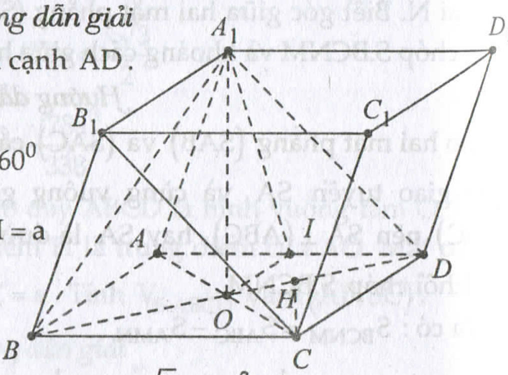
$AH \perp (SPN) \Rightarrow d(A;(SPN)) = AH$.

Ta có $AE = NP = a; SA = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{12}{13}}$

Vậy $d(A;(SPN)) = a\sqrt{\frac{12}{13}}$.

Bài 2.4.17. Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm cạnh AD.

Ta có $AD \perp (AOI)$

$\Rightarrow \widehat{A_1IO} = ((ADD_1A_1),(ABCD)) = 60^0$

Vì $OI = \frac{a}{2}$, nên ta suy ra $A_1I = 2OI = a$

$\Rightarrow A_1O = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1O.S_{ABCD} = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

Gọi B_2 là hình chiếu của B_1 xuống mặt phẳng (ABCD)

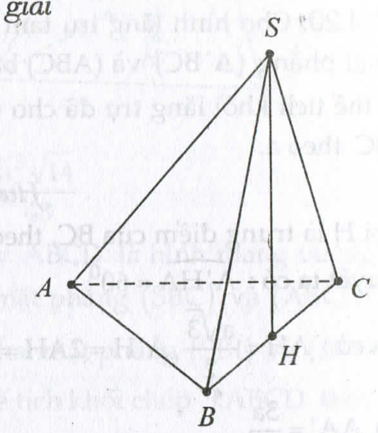
Do $B_1C // A_1D \Rightarrow B_1C // (A_1BD) \Rightarrow d(B_1,(A_1BD)) = d(C,(A_1BD)) = CH$

Trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD

Ta có: $CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(B_1,(A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2.4.18. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của S xuống BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có $SH = a\sqrt{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

Ta có tam giác SAC vuông tại S.

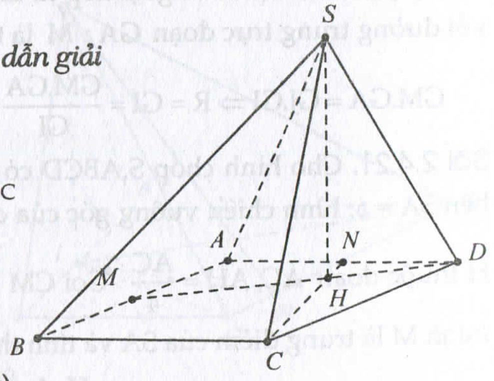
Vì $SA = a\sqrt{21}, SC = 2a, AC = 5a$

và $S_{\Delta SAC} = a^2\sqrt{21}$ nên ta có được:

$d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}$.

Bài 2.4.19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Hướng dẫn giải



Ta có: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.S_{MNDC}$

Mà $S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC}$

$= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$.

Nên

$V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$ (đvtt).

Lại thấy: $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}).\frac{1}{2}(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = DA^2 - DC^2 = 0$.

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy:

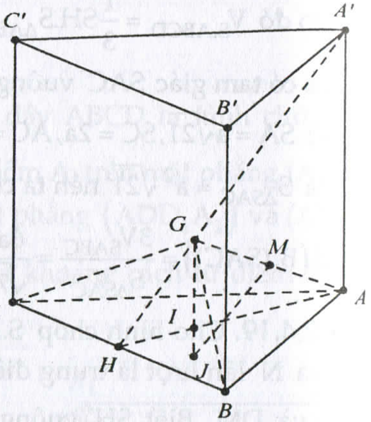
$$d(SC;DM) = d(H;SC) = \frac{2S_{\Delta HSC}}{SC} = \frac{SH.CH}{SC} = \frac{SH.CH}{\sqrt{SH^2+CH^2}}.$$

Lại có: $CH = \frac{2S_{\Delta CMD}}{DM} = \frac{2\left(S_{ABCD} - S_{\Delta AMD} - S_{\Delta CMB}\right)}{DM} = a\sqrt{\frac{4}{5}}$

Thay lên trên ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

Bài 2.4.20. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thuyết ta có : $\widehat{A'HA} = 60^0$

Ta có : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

và $AA' = \frac{3a}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ:

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).

Gọi I là tâm của tam giác ABC, suy ra $GI // AA' \Rightarrow GI \perp (ABC)$

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC suy ra J là giao điểm của GI với đường trung trực đoạn GA ; M là trung điểm GA, ta có:

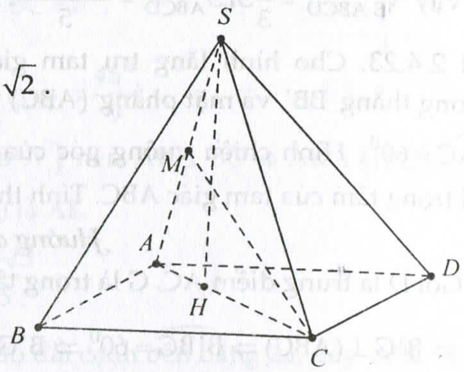
$$GM.GA = GJ.GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}.$$

Bài 2.4.21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn $AC, AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Hướng dẫn giải

- Chứng minh M là trung điểm SA

Ta có:



$AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$,

$HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta ACS$ cân tại C

nên M là trung điểm SA.

- Tính $V_{S.MBC}$?

Vì M là trung điểm SC

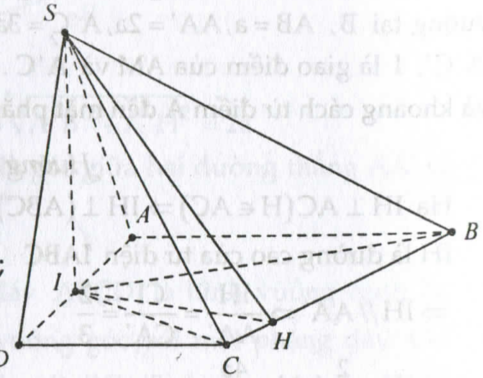
nên $S_{SCM} = \frac{1}{2}S_{SAC}$

suy ra $V_{SMBC} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{6}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

Bài 2.4.22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Hướng dẫn giải

Vì hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ hay là $SI \perp (ABCD)$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD}$



Ta có : $S_{ABCD} = \frac{AD(AB+CD)}{2} = 3a^2$.

Gọi H là hình chiếu của I xuống BC

$\Rightarrow BC \perp (SIH)$

$\Rightarrow \widehat{SHI} = \left((SBC),(ABCD)\right) = 60^0$.

Ta có: $BC = \sqrt{AD^2 + (AB-DC)^2} = a\sqrt{5}$;

$S_{\Delta IDC} = \frac{a^2}{2}; S_{\Delta AIB} = a^2$.

$\Rightarrow S_{\Delta BCI} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IDC} - S_{\Delta ABI}) = \frac{3}{2}a^2$

$\Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = IH.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$

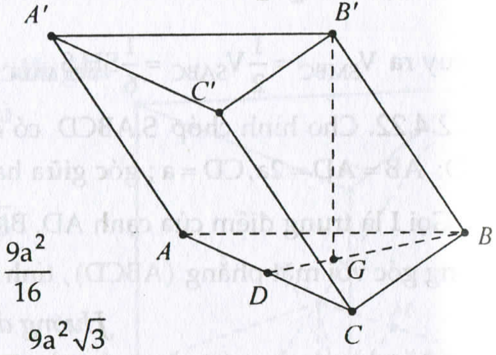
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Bài 2.4.23. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'.ABC theo a.

Hướng dẫn giải

Gọi D là trung điểm AC, G là trong tâm ΔABC

$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^0 \Rightarrow B'G = BB'.\sin\widehat{B'BG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;



$BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = \frac{3a}{4}$.

Trong ΔABC, ta có:

$BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow CD = \frac{AB}{4}$

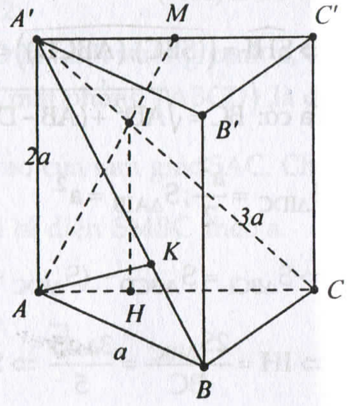
$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$

$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}; S_{\Delta ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$

Thể tích khối tứ diện A'.ABC: $V_{A'ABC} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3}B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{9a^3}{208}$.

Bài 2.4.24. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Hướng dẫn giải



Hạ $IH \perp AC (H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$;

IH là đường cao của tứ diện IABC

$\Rightarrow IH // AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$

$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5}$,

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$.

Thể tích khối tứ diện IABC: $V = \frac{1}{3}IH.S_{\Delta ABC} = \frac{4a^3}{9}$.

Hạ $AK \perp A'B \left(K \in A'B\right)$. Vì $BC \perp \left(ABB'A'\right)$ nên $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp \left(IBC\right)$.

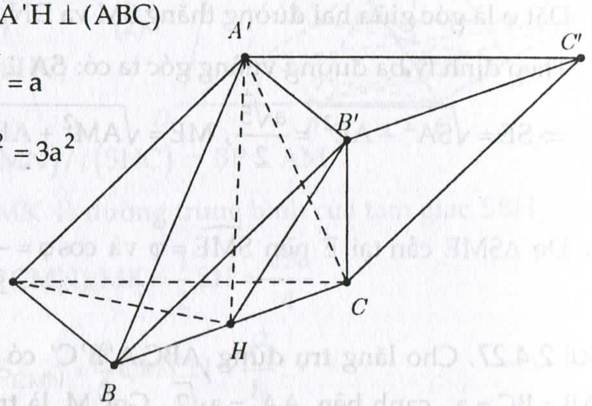
Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK

$$AK = \frac{2S_{\Delta AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Bài 2.4.25. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$



và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2$

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC}$

$= \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

Trong tam giác vuông A'B'H có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác B'BH cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì: $\varphi = \widehat{B'BH}$. Vậy $\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$

Bài 2.4.26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN .

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.

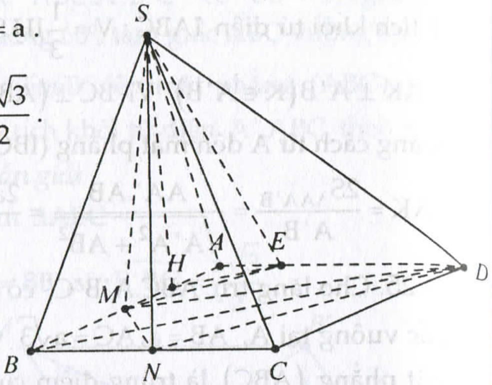
Do đó tam giác đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác BMDN là:

$S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp S.BMDN :

$V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).



Kẻ $ME // DN$ $(E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $\widehat{(SM, ME)} = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do ΔSME cân tại E nên $\widehat{SME} = \varphi$ và $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 2.4.27. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C .

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là:

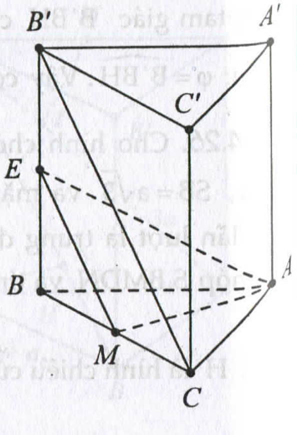
$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt).

Gọi E là trung điểm của BB'.

Khi đó mặt phẳng $(AME) // B'C$

nên $d(AM, B'C) = d(B'C, (AME)) = d(C, (AME))$.

Nhận thấy $d(C, (AME)) = d(B, (AME)) = h$



Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C là $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 2.4.28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm của AD.

Ta có tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

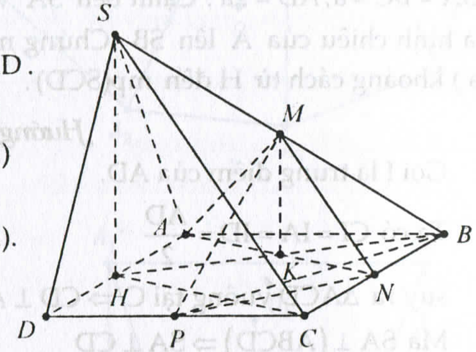
$\Rightarrow SH \perp BP$ (1)

Ta có ABCD là hình vuông nên:

$\Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow BP \perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$

Mặt khác:



$MN // SC; AN // HC \Rightarrow (AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp AM$

Gọi $K = BH \cap AN$. Ta có MK là đường trung bình của tam giác SBH

Suy ra $MK // SH \Rightarrow MK \perp (CMN); MK = \frac{1}{2}SH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Diện tích tam giác CMN : $S_{CMN} = \frac{1}{2}CM.CN = \frac{a^2}{8}$

Thể tích khối tứ diện CMNP : $V_{CMNP} = \frac{1}{3}.MK.S_{CMN} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt).

Bài 2.4.29. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Hướng dẫn giải

Gọi P là trung điểm của SA. Ta có MP là đường trung bình của tam giác

$EAD \Rightarrow MP // AD \Rightarrow MP // NC$ và $MN = \frac{1}{2}AD = NC$.

Suy ra MNCP là hình bình hành $\Rightarrow MN // CP \Rightarrow MN // (SAC)$.

Ta dễ chứng minh được

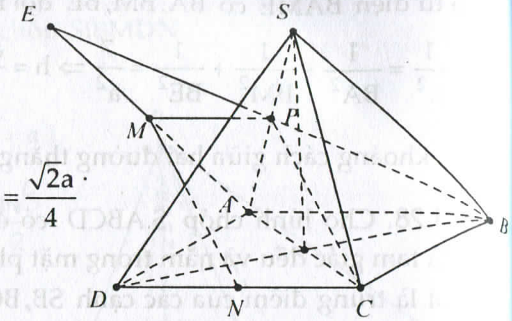
$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$

Vì $MN // (SAC)$ nên:

$d(MN, AC) = d(N, (SAC))$

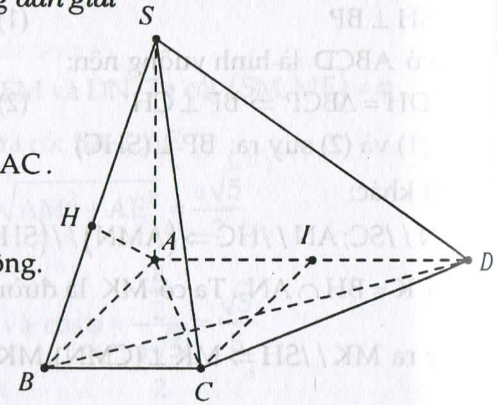
$$= \frac{1}{2} d(B, (SAC)) = \frac{1}{4} BD = \frac{\sqrt{2}a}{4}.$$

Vậy $d(MN, AC) = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.



Bài 2.4.30. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mp(SCD).

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có $CI = IA = ID = \dfrac{AD}{2}$

suy ra ΔACD vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$.

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

nên ta có $CD \perp SD$ hay ΔSCD vuông.

Gọi d₁, d₂ lần lượt là khoảng cách từ B, H đến mp(SCD)

Ta có:

$$\Delta SAB \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3} \text{ mà } \frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1.$$

Thể tích khối tứ diện S.BCD : $V_{SBCD} = \dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Ta có:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a, CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2.$$

Ta có: $V_{SBCD} = \dfrac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \dfrac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến mp(SCD) là $d_2 = \dfrac{a}{3}$.

---

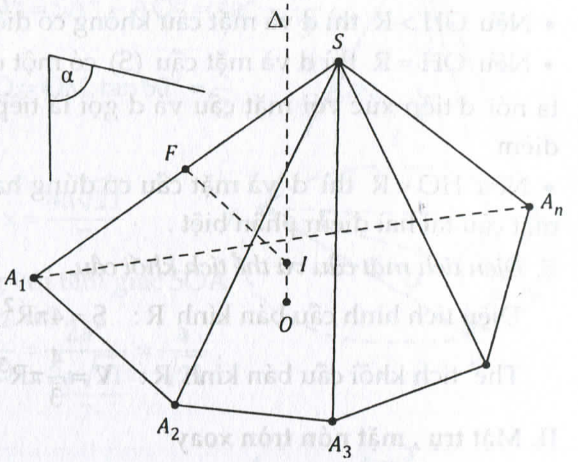
§ 5. MẶT CẦU – MẶT TRỤ TRÒN XOAY

I. Mặt cầu

1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

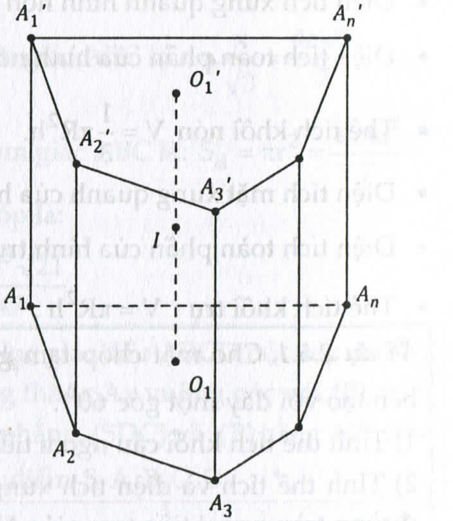
Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ nội tiếp mặt cầu khi và chỉ khi đáy là đa giác nội tiếp. Khi đó để xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp, ta làm như sau:

- Dựng đường thẳng Δ vuông góc với đáy tại tâm của đáy
- Dựng mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên
- Giao điểm $I = \Delta \cap (\alpha)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



2. Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

Hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đó là lăng trụ đứng và đáy là đa giác nội tiếp. Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp là trung điểm đoạn nối tâm của hai đáy.



3. Vị trí tương đối của một hình phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu S(O,R) và một mặt phẳng (P) bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

- Nếu $OH > R$ thì (P) không cắt mặt cầu
- Nếu $OH = R$ thì (P) và (S) có một điểm chung duy nhất là H.

Khi đó ta nói: (P) tiếp xúc với mặt cầu và (P) gọi là mặt phẳng tiếp diện, H gọi là tiếp điểm.

- Nếu $OH < R$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn (C) có tâm H bán kính $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$.

Nếu O nằm trên (P) thì (C) gọi là đường tròn lớn và có bán kính R.

4. Vị trí tương đối của một đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu S(O,R) và một đường d bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên d.

- Nếu $OH > R$ thì d và mặt cầu không có điểm chung.
- Nếu $OH = R$ thì d và mặt cầu (S) có một điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói d tiếp xúc với mặt cầu và d gọi là tiếp tuyến của mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.
- Nếu $HO < R$ thì d và mặt cầu có đúng hai điểm chung. Khi đó ta nói d cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt .

5. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Diện tích hình cầu bán kính R : $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu bán kính R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

II. Mặt trụ , mặt nón tròn xoay

Công thức tính diện tích và thể tích.

- Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi Rl$
- Diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R(l + R)$.
- Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.
- Diện tích mặt xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi Rh$.
- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_d = 2\pi R(R + h)$.
- Thể tích khối trụ : $V = \pi R^2 h$.

Ví dụ 2.5.1. Cho mặt chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng 2a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0.

1) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

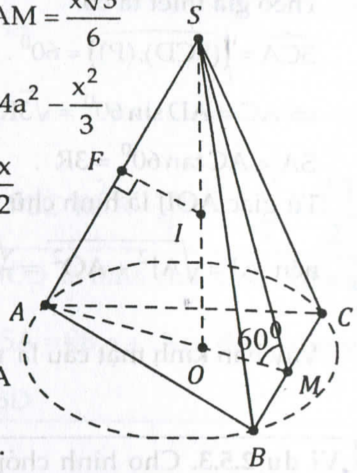
2) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

1) Đặt $AB = x$. Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABC)$

Gọi M là trung điểm đoạn AB, suy ra $BC \perp (SMA)$ nên góc $\widehat{SMA}$ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp, suy ra $\widehat{SMA} = 60^0$.

Gọi F là trung điểm cạnh SA, trong mặt phẳng (SMA) đường trung trực đoạn SA cắt SO tại I. Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính $R = SI$.



Ta có $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$

Trong tam giác SAO, ta có: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4a^2 - \frac{x^2}{3}$

Trong tam giác SOM, ta có: $SO = OM.\tan 60^0 = \frac{x}{2}$

Từ đó suy ra:

$$\frac{x^2}{4} = 4a^2 - \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow \frac{7x^2}{12} = 4a^2 \Rightarrow x = \frac{4a\sqrt{21}}{7}.$$

Ta có tam giác SFI đồng dạng với tam giác SOA

nên ta có: $\frac{SI}{SA} = \frac{SF}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{2a^2}{\frac{2a\sqrt{21}}{7}} = \frac{a}{\sqrt{21}}$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi a^3}{63\sqrt{21}}$.

2) Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $r = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{7}}{7}$

Suy ra diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $S_d = \pi r^2 = \frac{16\pi a^2}{7}$

Vậy thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp là:

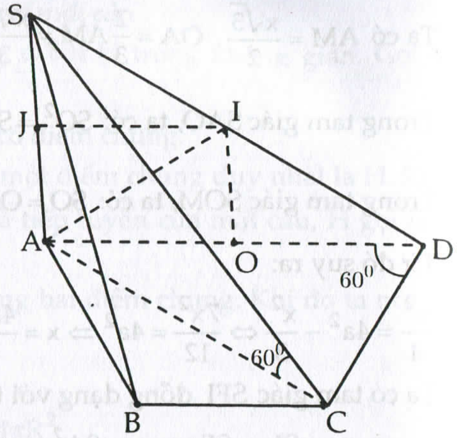
$$V = \frac{1}{3}SO.S_d = \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{21}}{7}.\frac{16\pi a^2}{7} = \frac{32\pi a^3\sqrt{21}}{147}.$$

Ví dụ 2.5.1. Trong hình phẳng (P) cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD = 2R. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với (P), trên Ax lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (P) bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D .

Lời giải

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AD, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Kẻ Ox song song với SA, ta có Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Trong tam giác SAC từ trung điểm J của cạnh SA kẻ Jy song song với AC, ta có Jy là đường trung trực cạnh SA. Gọi I là giao điểm của Ox và Jy.

Ta có I thuộc Ox nên IA = IB = IC = ID và I thuộc Jy nên IS=IA vậy I là tâm hình cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D. Và bán kính hình cầu này là r = IA.



Theo giả thiết ta có:

$\widehat{SCA} = \left(\widehat{(SCD),(P)}\right) = 60^0$.

$\Rightarrow AC = AD\sin 60^0 = \sqrt{3}R$,

$SA = AC\tan 60^0 = 3R$.

Tứ giác AOIJ là hình chữ nhật

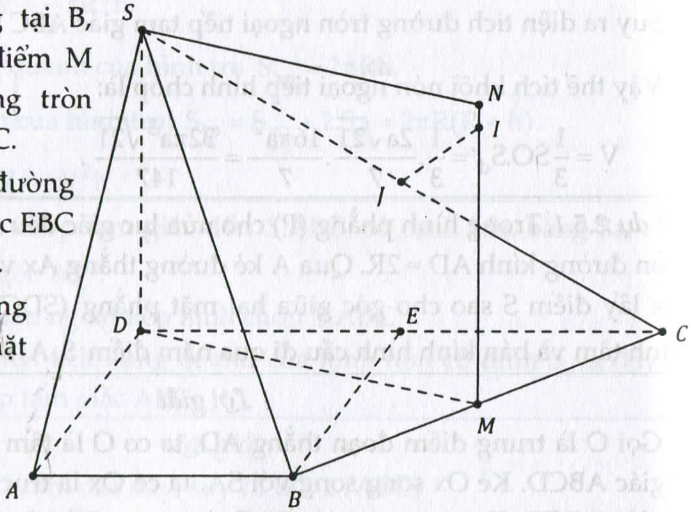
nên $AI = \sqrt{AJ^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $r = \frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Ví dụ 2.5.3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và SD = a. Gọi E là trung điểm của DC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

Lời giải.

Vì $AB = DE = AD = a$ và $\widehat{DAB} = 1v$ nên ABED là hình vuông.



Tam giác BDC có EB = ED = EC = a nên vuông tại B, $BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC.

Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC thì Δ song song với SD.

Dựng mặt phẳng trung trực cạnh SC, mặt phẳng đó cắt Δ tại I.

Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

Kẻ SN // DM cắt MI tại N, ta có SDMN là hình chữ nhật với SD = a và

$$DM^2 = \frac{DB^2 + DC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}.$$

Ta có $SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (NM - IM)^2 = \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2$

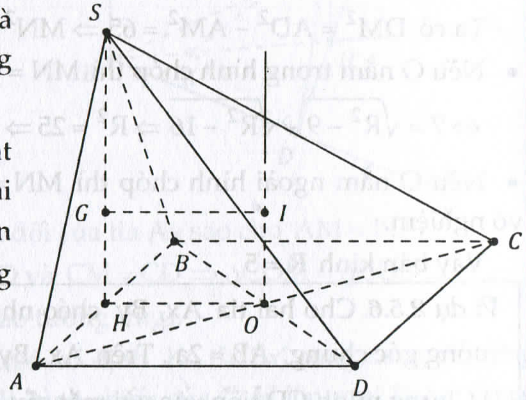
Mà $IC^2 = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2}$ và $R = IC = IS$

nên $\frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{3}{2}a$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BEC là: $R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}a$

Ví dụ 2.5.4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Mặt phẳng $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA = SB = a$. Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD.

Lời giải.



Vì tam giác SAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD là đường thẳng Δ song song với SH.

Gọi G là trọng tâm tam giác đều SAB.

Vì $HO \perp (SAB)$ nên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là đường thẳng qua G, song song với HO cắt Δ tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD. Tứ giác GHOI là hình chữ nhật.

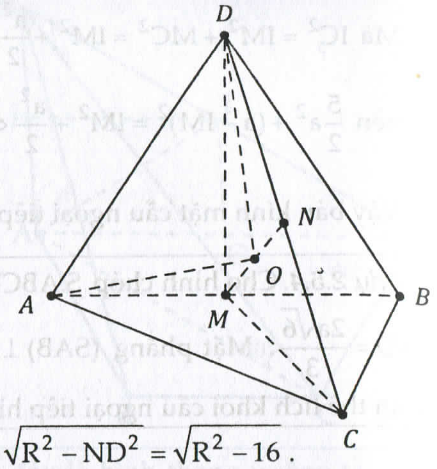
Ta có $GH = \frac{1}{3}SH = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Nên $IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{GH^2 + \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + \frac{a^2 + \frac{8}{3}a^2}{4}} = a$.

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD đó là $R = IA$, nên thể tích khối cầu $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}a^3$.

Ví dụ 2.5.5. Cho tứ diện ABCD có $AB = 6$, $CD = 8$, các cạnh còn lại bằng $\sqrt{74}$. Hãy tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Lời giải.



Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Do O cách đều AB nên O thuộc mặt phẳng trung trực cạnh AB. Đó chính là mp(MCD). Với M là trung điểm AB. Tương tự O cách đều CD nên O thuộc mp trung trực cạnh CD là mp (NAB), với N là trung điểm CD. Vậy O nằm trên giao tuyến MN của mp(MCD) và MP (NAB). Do $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Ta có $OA = OD = R$;

$$OM = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 9},\ ON = \sqrt{R^2 - ND^2} = \sqrt{R^2 - 16}.$$

Ta có $DM^2 = AD^2 - AM^2 = 65 \Rightarrow MN^2 = DM^2 - DN^2 = 49 \Rightarrow MN = 7$.

- Nếu O nằm trong hình chóp thì $MN = OM + ON$

$\Leftrightarrow 7 = \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.

- Nếu O nằm ngoài hình chóp thì $MN = OM - ON \Leftrightarrow 7 = \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16}$ vô nghiệm.

Vậy bán kính $R = 5$.

Ví dụ 2.5.6. Cho hai tia Ax, By chéo nhau và vuông góc, nhận AB là đoạn vuông góc chung, $AB = 2a$. Trên Ax, By lần lượt lấy các điểm C, D.

1) Chứng minh CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB $\Leftrightarrow CD = AC + BD$.

2) Với điều kiện ở câu 1, chứng tỏ rằng điểm tiếp xúc của CD với mặt cầu đường kính AB thuộc một đường tròn cố định và góc tạo bởi CD với mặt phẳng chứa đường tròn đó không đổi.

3) Nếu CD thỏa mãn điều kiện $AC^2 + BD^2 = b^2$ (b là số cho trước). Hãy tìm liên hệ giữa a và b để CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Lời giải.

1) Đặt $AC = c$, $BD = d$.

Gọi I là trung điểm của AB và H là hình chiếu của I lên CD.

Ta có $IA = IB = a$.

Cách 1

- Nếu CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB thì ta có H là tiếp điểm. Ta có $CH = CA$, $DH = DB$ nên $CD = CH + DH = AC + BD$.
- Ngược lại nếu $CD = AC + BD$ thì ta chứng minh CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

Do $IH \perp CD$ nên ta cần chứng minh $IH = \frac{AB}{2} = a$.

Thật vậy

* Nếu $IH < a$. Áp dụng định lý pitago cho hai Δ vuông IAC và IHC

$CH = \sqrt{CI^2 - IH^2} > \sqrt{CI^2 - IA^2} = AC$ (1).

Áp dụng định lý pitago cho hai Δ vuông IBD và IHD

$DH = \sqrt{DI^2 - IH^2} > \sqrt{DI^2 - IB^2} = BD$ (2).

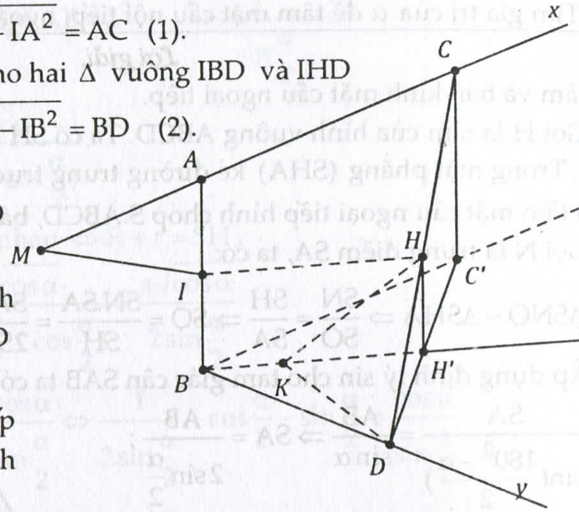
Từ (1) và (2) suy ra

$CD = CH + DH > AC + BD$

trái với giả thiết.

* Nếu $IH > a$ chứng minh tương tự ta có $CD < AC + BD$ trái với giả thiết.

Vậy $IH = a$ hay CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.



Cách 2. Lấy điểm M là điểm trên tia đối của tia Ax sao cho $AM = BD$.

Ta dễ chứng minh được $OM = OD$ và $CM = CD \Rightarrow \Delta COM = \Delta COD$.

Suy ra $IA = OH = a$ (Hai đường cao tương ứng).

2) • Chứng minh H thuộc đường tròn cố định. Kẻ tia Bx′ song song và cùng chiều với Ax. Gọi C′ và H′ lần lượt là hình chiếu của C, H lên mp(Bx′y). Ta có BH′ là phân giác của góc x′By. Nên H′ cố định thuộc tia phân giác Bz của góc x′By. Vậy H thuộc mp(ABz) cố định. Mặt khác H lại thuộc mặt cầu cố định. Nên H thuộc đường tròn cố định là giao của mp (ABz) với mặt cầu đường kính AB.

- Chứng minh góc giữa CD và mp (ABz) không đổi.

Gọi K là hình chiếu của D lên Bz ta có góc $\widehat{DHK}$ là góc giữa CD và mp (ABz). Ta có: $\Delta BDK = \Delta HDK \Rightarrow \widehat{DHK} = 45^0$ (không đổi)

3) Hệ thức liên hệ giữa a và b.

Do CD tiếp xúc với mặt cầu nên theo câu 1 ta có $CD = AC + BD = c + d$

Suy ra $cd = 2a^2$ (1)

Ta có $AC^2 + BD^2 = b^2 \Rightarrow CD = \sqrt{4a^2 + b^2} \Rightarrow c + d = \sqrt{4a^2 + b^2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có c, d là nghiệm của phương trình: $x^2 - \sqrt{4a^2 + b^2}.x + 2a^2 = 0$

Vậy hệ thức liên hệ giữa a và b để CD tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB là $b \geq 2a$.

Ví dụ 2.5.7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.

1) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

2) Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp

3) Tìm giá trị của α để tâm mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp trùng nhau.

Lời giải.

1) Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (SHA) kẻ đường trung trực cạnh SA cắt SH tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, bán kính $R = SO$.

Gọi N là trung điểm SA, ta có:

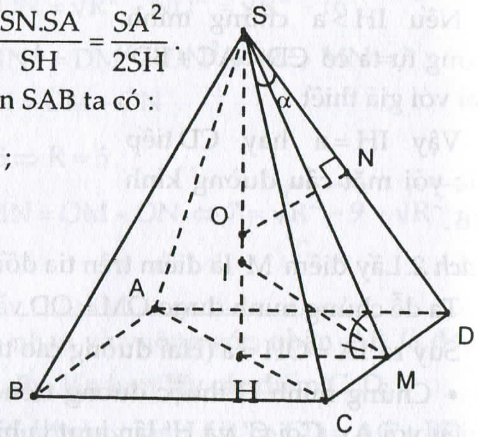
$$\Delta SNO \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SN}{SO} = \frac{SH}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SN.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}.$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác cân SAB ta có :

$$\frac{SA}{\sin(\frac{180^0 - \alpha}{2})} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow SA = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy $R = SO = \dfrac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}}$.



2) Tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp.

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SH. Gọi M là trung điểm của AB, ta có $AB \perp (SHM)$ tại M. Gọi I là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{SMH}$ $(I \in SH)$. Ta có I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp. Bán kính $r = IH$.

Để tính bán kính r ta có thể tính theo hai cách sau:

Cách 1. Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS + MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH.MH}{MS + MH};\ SM = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2},\ \ MH = \frac{a}{2}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $r = IH = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}$.

Cách 2. Dựa vào công thức $r = \dfrac{3V}{\sum S}$.

Thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{3.2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$\sum S = 4S_{\Delta SAB} + S_{ABCD} = 4.\frac{1}{2}SM.AB + a^2 = \frac{a^2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Bán kính $r = \dfrac{3V}{\sum S} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}$.

3) Tâm của hai hình cầu trùng nhau $\Leftrightarrow R + r = SH$.

Hay: $\dfrac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

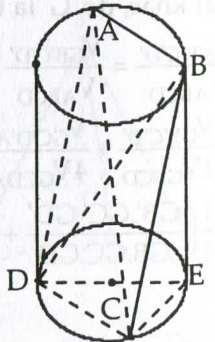
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Vậy khi $\alpha = 45^0$ thì tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

Ví dụ 2.5.9. Bên trong hình trụ có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.



Ta có $DC \perp BC, CE$ là hình chiếu của đường xiên

$\Rightarrow DC \perp CE$ (định lí ba đường vuông góc)

do đó $\widehat{BCE} = 45^0$ là góc giữa hình vuông ABCD và đáy hình trụ.

Trong tam giác BEC ta có

$BE = BC.\sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}a}{2};\ BD = \sqrt{2}a$.

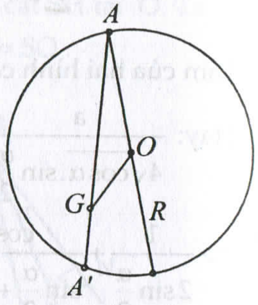
Trong tam giác vuông BED ta có: $DE^2 = DB^2 - BE^2 = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow DE = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 h = \frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}$.

Ví dụ 2.5.10. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G, nội tiếp trong một mặt cầu $(O;R)$. Các đường thẳng GA, GB, GB, GC lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Chứng minh rằng $V_{ABCD} \le V_{A'B'C'D'}$.

Lời giải.



Theo tính chất phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ta có

$$GA.GA' = GB.GB' = GC.GC' = GD.GD' = R^2 - OG^2.$$

Với mọi điểm M ta có

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2$$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên suy ra

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Cho $M \equiv O$ thì $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(R^2 - OG^2)$.

Vì thế $4 = \frac{4(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{R^2 - OG^2}$

$$= \frac{GA^2}{GA.GA'} + \frac{GB^2}{GB.GB'} + \frac{GC^2}{GC.GC'} + \frac{GD^2}{GD.GD'} \ge 4\sqrt[4]{\frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{GC}{GC'}.\frac{GD}{GD'}}$$

Hay $\frac{GA'}{GA}.\frac{GB'}{GB}.\frac{GC'}{GC}.\frac{GD'}{GD} \ge 1$ (1).

Mặt khác, do G là trọng tâm của tứ diện nên

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{GB'C'D'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{V_{ABCD}}$$

$$= \frac{V_{GB'C'D'}}{4V_{GBCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{4V_{GCDA}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{4V_{GDAB}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{4V_{GABC}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{GB'.GC'.GD'}{GB.GC.GD} + \frac{GC'.GD'.GA'}{GC.GD.GA} + \frac{GD'.GA'.GB'}{GD.GA.GB} + \frac{GA'.GB'.GC'}{GA.GB.GC}\right)$$

$$\ge \sqrt[4]{\frac{GA'}{GA}.\frac{GB'}{GB}.\frac{GC'}{GC}.\frac{GD'}{GD}} \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $G \equiv O$, hay ABCD là tứ diện gần đều.

BÀI TẬP

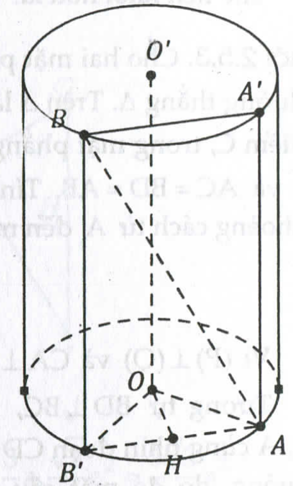
Bài 2.5.1. Một khối trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$.

1) Tính diện tích của thiết đi qua AB và song song với trục của khối trụ.

2) Tính góc giữa hai bán kính đáy đi qua A, B.

3) Cho hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đáy tròn sao cho góc giữa AB và trục hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ

Hướng dẫn giải



1) Từ A, B ta kẻ AA', BB' song song với trục hình trụ. Khi đó thiết diện là hình chữ nhật $AA'BB'$, ta có $\widehat{ABB'} = 30^0$ là góc giữa AB và trục hình trụ.

Diện tích thiết diện

$$S_{AA'BB'} = BB'.B'A = \sqrt{3}R.\sqrt{3}R\tan 30^0 = \sqrt{3}R^2.$$

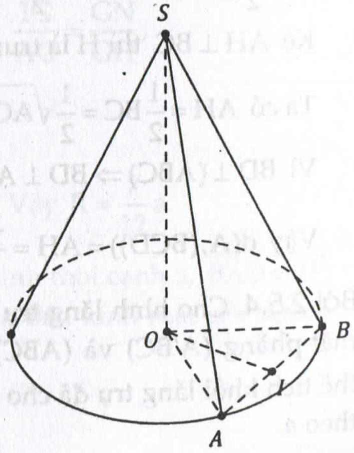
2) Góc giữa AO và BO′ là $\widehat{AOB'} = 60^0$, do tam giác AOB' đều.

3) Ta có mặt phẳng $(AA'BB')$ chứa AB và song song với trục đường tròn. Do đó khoảng cách giữa trục đường tròn OO′ với AB là khoảng cách giữa OO′ và mặt phẳng $(AA'BB')$.

Gọi H là trung điểm của AB, thì OH là khoảng cách giữa OO′ và mặt phẳng $(AA'BB')$. Ta có $OH = \frac{\sqrt{3}R}{2}$.

Bài 2.5.2. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0, \widehat{SAB} = 60^0$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$OI \perp AB, SI \perp AB, OI = a$.

Ta có $AO = SA.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.SA$;

$$AI = SA\cos 60^0 = \frac{1}{2}SA.$$

Từ đó suy ra $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta lại có $\frac{AI}{AO} = \cos\widehat{IAO}$

$\Rightarrow \sin\widehat{IAO}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{a}{OA}\Rightarrow AO=\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

Xét tam giác SAO, ta có $SA=\frac{AO}{\cos 30^0}=\sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\sqrt{3}\pi a^2$.

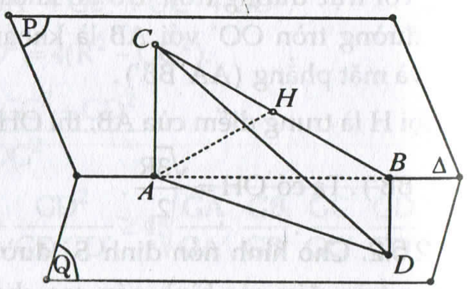
Thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^3$.

Bài 2.5.3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối D năm 2003)

Hướng dẫn giải

Vì $(P)\perp(Q)$ và $CA\perp\Delta$ nên $CA\perp(Q)\Rightarrow CA\perp AD$.



Tương tự $BD\perp BC$, nên các điểm B, A cùng nhìn đoạn CD dưới một góc vuông, do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là trung điểm CD và có bán kính $R=\frac{CD}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác ABD, ACD ta có

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AB^2+BD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Kẻ $AH\perp BC$ thì H là trung điểm của BC (do tam giác ABC vuông cân A).

Ta có $AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AB^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Vì $BD\perp(ABC)\Rightarrow BD\perp AH$ nên $AH\perp(CBD)$.

Vậy $d(A,(BCD))=AH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Bài 2.5.4. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0 Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

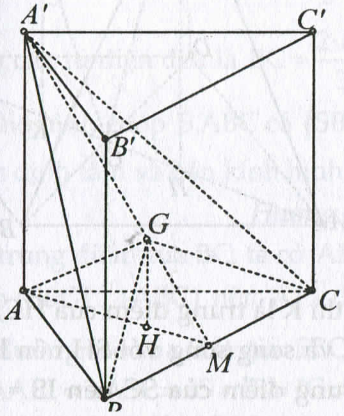
Hướng dẫn giải

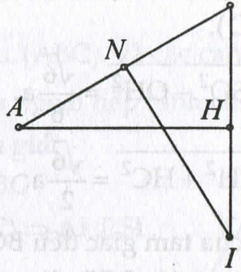
Gọi M là trung điểm của BC

Do tam giác ABC đều nên $BC\perp AM$

$\Rightarrow A'M\perp BC$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $\widehat{A'MA}=60^0$. Ta có $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ nên $A'A=AM.\tan\widehat{A'MA}=\frac{3}{2}a$.





Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là $V=AA'.S_{ABC}=\frac{3}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\frac{MG}{MA'}=\frac{1}{3}=\frac{MH}{MA}$ nên $GH//AA'$ $\Rightarrow GH\perp(ABC)$. Do H cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên GH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của GH với trung trực của GA (qua trung điểm N của GA) thì đó là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC.

Ta có hai tam giác IGN và AGH đồng dạng, nên $\frac{IG}{AG}=\frac{GN}{GH}$,

Suy ra bán kính mặt cầu $R=\frac{GA.GN}{GH}=\frac{GA^2}{2GH}$.

Vì $GH=\frac{AA'}{3}=\frac{a}{2}$ nên $GA^2=GH^2+HA^2=\frac{7}{12}a^2$. Vậy $R=\frac{7}{12}a$.

Bài 2.5.5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60^0$ và các cạnh bên SA = SB = SD. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD biết $\widehat{BSD}=90^0$.

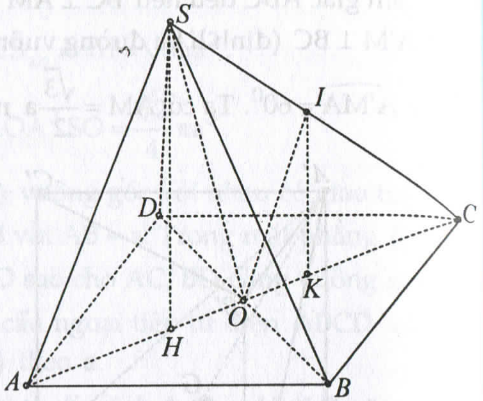
Hướng dẫn giải

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi ABCD.

Theo bài ra ta có tam giác ABD là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow BD = a$.

Mà tam giác SBD vuông tại S

nên $SB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, SO = \frac{a}{2}$.



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (do các cạnh bên SA = SB = SC).

Ta có $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$,

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại điểm I. Ta có I là trung điểm của SC nên IS = IC, do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD. Bán kính của mặt cầu là $R = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

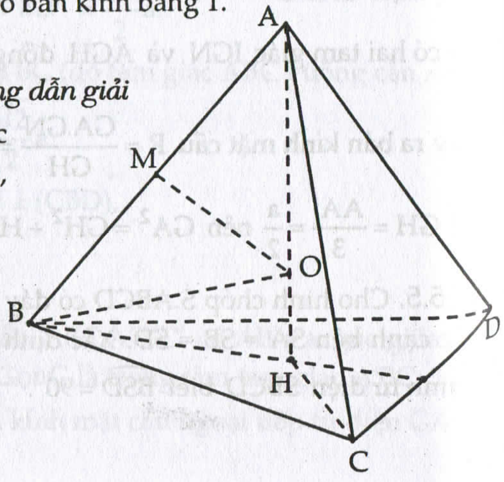
Bài 2.5.6. Cho tứ diện đều ABCD có tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là O và H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD).

1) Tính tỷ lệ $k = \frac{OA}{OH}$.

2) Giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện có bán kính bằng 1.

Tính độ dài các cạnh của tứ diện.

Hướng dẫn giải



1) Do tứ diện ABCD đều nên các khối chóp O.ABC, O.ACD, O.ABD, O.BCD có thể tích bằng nhau.

$$V_{A.BCD} = 4V_{O.BCD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = 4.\frac{1}{3}OH.S_{BCD}$$

$$\Leftrightarrow AH = 4OH$$

$$\Rightarrow k = \frac{OA}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{3OH}{OH} = 3$$

---

2) Tâm O là giao điểm của đường trung trực cạnh AB của tam giác ABH.

Ta có $R = OA = 1 \Rightarrow OH = \frac{1}{3}$. Tam giác BOH vuông tại H

nên $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - OH^1} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

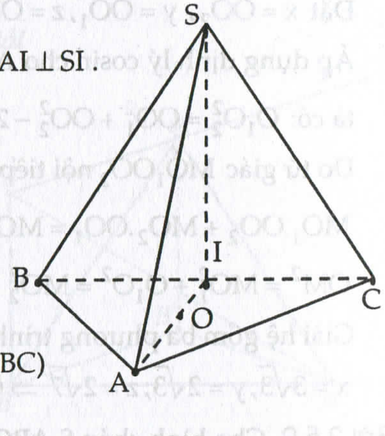
Ta có BH là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD

nên $BH = \frac{\sqrt{3}BC}{3} \Rightarrow BC = \sqrt{3}BH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy cạnh của tứ điện đều là $BC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 2.5.7. Cho hình chóp S.ABC có $(SBC) \perp (ABC)$ và các cạnh $AB = AC = SA = SB = a$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp khi $SC = x$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI \perp BC$.

Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ nên $AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI$.

$\Rightarrow SI$ là đường cao của tam giác SBC

Ta có $\Delta ABI = \Delta ASI \Rightarrow IS = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC ta có OS = OB = OC nên O thuộc thẳng d qua I vuông góc với (SBC).

Ta có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow d \subset (ABC) \Rightarrow O \in (ABC)$

$\Rightarrow$ O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Gọi *K* là giao của *AI* với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Ta có : $AB^2 = AI.AK = AI.2R \Rightarrow R = \frac{AB^2}{2AI}$.

Ta có:

$$AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \frac{BC^2}{4} = a^2 - \frac{SB^2 + SC^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}$$

$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$ $(0 < x < \sqrt{3}a)$. Vậy $R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$.

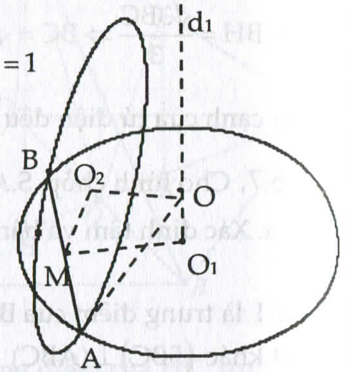
Bài 2.5.8. Cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').

1) Chứng minh có mặt cầu đi qua hai đường tròn đó.

2) Tìm bán kính R của mặt cầu biết $r_1 = 5; r_2 = \sqrt{10}; AB = 6; O_1O_2 = \sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d₁, d₂ lần lượt là hai đường thẳng đi qua O₁, O₂ và vuông góc với (P) và (P′). Gọi M là trung điểm AB ta có $(MO_1O_2) \perp AB \Rightarrow d_1, d_2 \subset (MO_1O_2)$. Gọi O là giao điểm của d₁ và d₂. Ta có O là tâm mặt cầu chứa (O_1) và (O_2). Bán kính $R = OA$.



Ta có $MO_1 = \sqrt{r_1^2 - MA^2} = 4; MO_2 = \sqrt{r_2^2 - MA^2} = 1$

Ta có tứ giác MO_1OO_2 là tứ giác nội tiếp.

$$\cos\widehat{O_1MO_2} = \frac{MO_1^2 + MO_2^2 - O_1O_2^2}{2MO_1.MO_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1MO_2} = 120^0 \Rightarrow \widehat{O_1OO_2} = 60^0$$

Đặt $x = OO_2, y = OO_1, z = OM$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔO_1OO_2

ta có: $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1.OO_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 21$ (1).

Do tứ giác MO_1OO_2 nội tiếp nên

$$MO_1.OO_2 + MO_2.OO_1 = MO.O_1O_2 \Leftrightarrow 4x + y = \sqrt{21}.z \quad (2)$$

$$OM^2 = MO_1^2 + O_1O^2 = MO_2^2 + O_2O^2 \Leftrightarrow z^2 = 16 + y^2 = 1 + x^2 \quad (3)$$

Giải hệ gồm ba phương trình (1),(2) và (3) ta tìm được:

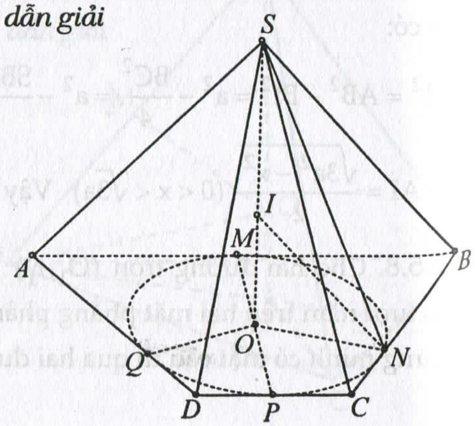
$$x = 3\sqrt{3}; y = 2\sqrt{3}; z = 2\sqrt{7} \Rightarrow OA^2 = AO_1^2 + O_1O^2 = 37 \Rightarrow R = OA = \sqrt{37}$$

Bài 2.5.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân và AB // CD. Đường tròn tâm O nội tiếp trong hình thang có bán kính r. Biết $SO \perp (ABCD)$ và $SO = 2r$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, P, Q là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp hình thang với các cạnh của hình thang.

Do $SO \perp (ABCD)$ nên các tam giác SOM, SON, SOP.SOQ bằng nhau và mọi điểm trên SO cách đều các mặt bên của hình chóp. Tâm mặt cầu nội tiếp là giao của phân giác trong góc $\widehat{SNO}$ với SO



Ta có $SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = r\sqrt{5}$.

Theo tính chất phân giác: $\dfrac{IO}{IS} = \dfrac{NO}{NS}$

Suy ra bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp là

$$R = IO = \frac{OS.ON}{NO + NS} = \frac{2r}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}r.$$

Bài 2.5.10. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia By lấy điểm N sao cho $AM + BN = MN$.

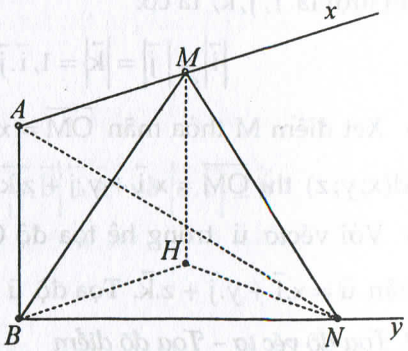
1) Tìm vị trí của M, N sao cho bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABMN là lớn nhất.

2) Chứng minh rằng khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) Gọi V là thể tích tứ diện ABMN.

Ta tính được $V = \dfrac{AB^3}{12}$ là giá trị không đổi, mà $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$ nên r lớn nhất khi S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất.



Đặt $AB = 2a, AM = x, BN = y$.

Từ $AM + BN = MN$ suy ra $xy = 2a^2$.

Diện tích toàn phần của tứ diện là

$$S_{tp} = a(x + y) + \frac{1}{2}(y\sqrt{x^2 + 4a^2} + x\sqrt{y^2 + 4a^2}).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của S_{tp} đạt được khi $x = y = a\sqrt{2}$, hay $AM = BN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$.

2) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2}$ nên

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2} \geq \sqrt{2xy + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$\min R = 2\sqrt{2}a$ khi $x = y = a\sqrt{2}$, hay đạt được tương ứng với bán kính mặt cầu nội tiếp đạt giá trị lớn nhất.

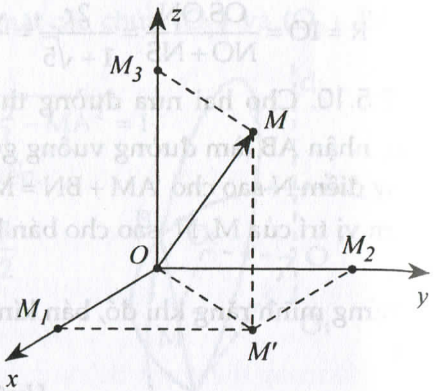
Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Tọa độ trong không gian

1. Hệ trục tọa độ trong không gian Oxyz



- Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.
- Điểm O gọi là gốc của hệ tọa độ, trục Ox là trục hoành, Oy là trục tung và Oz là trục cao.
- Véctơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, ta có:

$$\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1,\ \vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0.$$

- Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ thì $M(x;y;z)$. Ngược lại, điểm $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$.
- Với véctơ $\vec{u}$ trong hệ tọa độ Oxyz luôn tồn tại duy nhất bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$. Tọa độ $\vec{u}$ là $(x;y;z)$.

2. Tọa độ véc tơ – Tọa độ điểm

Cho $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ và số thực k. Khi đó

* $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2)$ * $k\vec{a}=(kx_1;ky_1;kz_1)$

* $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=k\Rightarrow\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{cases}.$

Chú ý: Nếu $x_2=0\ (y_2=0,z_2=0)$ thì $x_1=0\ (y_1=0,z_1=0)$

* $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ * $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

* $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ * $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Cho $A=(x_A;y_A;z_A)$, $B=(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, $D(x_D;y_D;z_D)$.

Khi đó:

* $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

* $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

* Trung điểm I của đoạn AB: $I=\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

* Trọng tâm G của ΔABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

* Trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$$

3. Tích có hướng của hai véc tơ và ứng dụng

a) Định nghĩa: Cho $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)$$

b) Các tính chất:

* $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ * $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$ và $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$

* $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a},\vec{b})$

c) Các ứng dụng của tích có hướng

- Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- Thể tích:
  - * **Hình hộp:** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$
  - * **Tứ diện:** $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:

* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$

* A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$.

3. Phương trình mặt cầu.

Mặt cầu (S) tâm I(a;b;c), bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1).$$

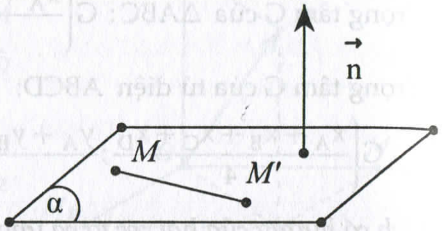
Phương trình (1) có thể được biểu diễn cách khác như sau

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \qquad (2)$$

Với $d=a^2+b^2+c^2-R^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2-d>0 \\ R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d} \end{cases}$.

II. Phương trình mặt phẳng

1. Véc tơ pháp tuyến:



Định nghĩa: Cho mặt phẳng (α). Véc tơ $\vec{n}\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ pháp tuyến (VTPT) của $mp(\alpha)$ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α), kí hiệu $\overrightarrow{n_\alpha}$ là VTPT của (α).

Chú ý:

* Nếu $\vec{n}$ là VTPT của (α) thì $k.\vec{n}$ $(k\neq0)$ cũng là VTPT của (α). Vậy $mp(\alpha)$ có vô số VTPT.

* Nếu hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ (không cùng phương) có giá song song (hoặc nằm trên) (α) thì $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một VTPT của mp (α).

* Nếu ba điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng thì véc tơ $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ là một VTPT của $mp(ABC)$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

* Cho $mp(\alpha)$ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$, có $\vec{n}=(A;B;C)$ là một VTPT. Khi đó phương trình tổng quát của (α) có dạng:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

* Nếu $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ thì $\vec{n}=(A;B;C)$ là một VTPT của (α).

* Nếu $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$; $abc\neq0$ thì phương trình của (ABC) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ và được gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α).

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :

Cho hai $mp(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

- (P) cắt (Q) $\Leftrightarrow A:B:C\neq A':B':C'$

- $(P)//(Q)\Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ đến $mp(P): Ax+By+Cz+D=0$ là:

$$d(M,(P))=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

III. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Phương trình tham số của đường thẳng:

a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ. Véc tơ $\vec{u}\neq\vec{0}$ gọi là véc tơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ. Ta kí hiệu $\overrightarrow{u_\Delta}$ là VTCP của Δ.

Chú ý

* Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k.\vec{u}$ $(k\neq0)$ cũng là VTCP của Δ

* Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP

* Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=\overrightarrow{u_\Delta}$ là một VTCP của Δ (Trong đó $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}$ lần lượt là VTPT của (P) và (Q)).

b) Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ (1)

(1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ, t gọi là tham số.

Chú ý . Cho đường thẳng Δ có phương trình (1)

* $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của Δ

* $M\in\Delta\Leftrightarrow M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$.

2. Phương trình chính tắc:

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ với $abc\neq0$.

Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\quad (2)$$

(2) gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$ và $d':\frac{x-x'_0}{a'}=\frac{y-y'_0}{b'}=\frac{z-z'_0}{c'}$ đi qua $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_{d'}}=(a';b';c')$.

* Nếu $[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}]\overrightarrow{MM'}=0 \Rightarrow$ d và d' đồng phẳng. Khi đó xảy ra ba trường hợp

i) d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{u'}]\neq\vec{0}$ và tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}\\[2mm] \dfrac{x-x'_0}{a'}=\dfrac{y-y'_0}{b'}=\dfrac{z-z'_0}{c'}\end{cases}.$$

ii) $d//d' \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}]\neq\vec{0}\end{cases}$

iii) $d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\ [\vec{u},\overrightarrow{MM'}]=\vec{0}\end{cases}$

* Nếu $[\vec{u},\vec{u'}]\overrightarrow{MM'}\neq 0\Rightarrow$ d và d' chéo nhau.

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho $mp(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT và đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

- Δ cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{n}$ và $\vec{u}$ không cùng phương $\Leftrightarrow Aa+Bb+Cc\neq 0$. Khi đó tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ: $\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0 & (a)\\ \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c} & (b)\end{cases}$

Từ (b) $\Rightarrow x=x_0+at, y=y_0+bt, z=z_0+ct$ thế vào (a) $\Rightarrow t\Rightarrow$ giao điểm.

* $\Delta//(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ M_0\notin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}$

* $\Delta\subset(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ M_0\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Aa+Bb+Cc=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$

* $\Delta\perp(\alpha)\Leftrightarrow\vec{n}$ và $\vec{u}$ cùng phương $\Leftrightarrow\vec{n}=k.\vec{u}$.

5. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0, có VTCP $\vec{u}$ và điểm $M\notin\Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

C1: Sử dụng công thức: $d(M,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|}$.

C2: Lập phương trình $mp(P)$ đi qua M vuông góc với Δ. Tìm giao điểm H của (P) với Δ. Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có VTCP $\vec{u}$ và Δ' đi qua M_0' có VTCP $\vec{u'}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

C1: Sử dụng công thức: $d(\Delta,\Delta')=\dfrac{\left|[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|[\vec{u},\vec{u'}]\right|}$.

C2: Tìm đoạn vuông góc chung MN. Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

C3: Lập phương trình $mp(P)$ đi qua Δ và song song với Δ'. Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P).

IV. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng:

Cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và đường thẳng $\Delta':\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}$ có VTCP $\vec{u'}=(a';b';c')$.

Đặt $\alpha=(\Delta,\Delta')$, khi đó:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{u'}\right)\right|=\frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho mp $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có $\vec{n}=(A;B;C)$ là VTPT và đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c}$ có $\vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP. Gọi φ là góc giữa $mp(\alpha)$ và đường thẳng Δ, khi đó ta có:

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right| = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(A;B;C)$

và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(A';B';C')$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(0^0 \le \varphi \le 90^0)$. Khi đó:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

§ 1. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ VÀ ỨNG DỤNG.

Các ứng dụng của tích có hướng của hai véc tơ

- **Diện tích tam giác:** Diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$
- **Thể tích:**
  - **+) Hình hộp:** Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' được tính bởi công thức
$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|.$$
  - **+) Tứ diện:** Thể tích tứ diện ABCD được tính bởi công thức
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|.$$
- **Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:**
  - +) Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.
  - +) Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$.

Ví dụ 1.1.3. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(4;2;1)$, $B(-1;0;3)$, $C(2;-2;0)$, $D(-3;2;1)$.

1) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng;

2) Tính diện tích tam giác BCD và đường cao BH của tam giác BCD;

3) Tính thể tích tứ diện ABCD và đường cao của tứ diện hạ từ A;

4) Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{BA}=(-5;-2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;-2;-3)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;2;-2)$, $\overrightarrow{CD}=(-5;4;1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = \left(\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\right) = (10;12;2)$

Nên $\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = -70 \ne 0$. Do đó, ta có A, B, C, D không đồng phẳng.

2) Ta có: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+12^2+2^2} = 2\sqrt{62}$

Vì $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BH.CD$ nên suy ra $BH = \frac{2S_{\Delta BCD}}{CD} = \frac{2\sqrt{62}}{\sqrt{42}} = \frac{2\sqrt{651}}{21}$.

3) Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{35}{3}$.

Gọi $h = d(A,(BCD))$, thế thì $h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{35}{2\sqrt{62}}$.

4) Ta có phương trình $AB: \begin{cases} x = 4+5t \\ y = 2+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$, suy ra $M(4+5t;2+2t;1-2t)$

Do đó: $\overrightarrow{CM} = (2+5t;4+2t;1-2t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}\right] = (10t;5t-7;30t+28)$

Suy ra $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1025t^2+1610t+833}$

Do $1025t^2+1610t+833 = 1025\left(t+\frac{161}{205}\right)^2 + \frac{8232}{41} \ge \frac{8232}{41}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = -\frac{161}{205}$.

Vậy $S_{\Delta MCD}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = -\frac{161}{205}$ hay $M\left(\frac{3}{41};\frac{88}{205};\frac{527}{205}\right)$.

Ví dụ 2.1.3. Trong không gian Oxyz cho $A(4;0;0)$, $B(x_0;y_0;0)$ với $x_0, y_0 > 0$ thỏa mãn $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB} = 45^0$.

1) Tìm tọa độ điểm C nằm trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện OABC bằng 8.

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox, điểm N thuộc Oz sao cho tam giác AMB cân tại M và tứ diện ABMN có thể tích bằng 20.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (4;0;0)$, $\overrightarrow{OB} = (x_0;y_0;0)$ suy ra $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 4x_0$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x_0-4)^2+y_0^2 = 40 \\ \dfrac{4x_0}{4.\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2-8x_0 = 24 \\ \sqrt{2}x_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = x_0^2 \\ x_0^2-4x_0-12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow B(6;6;0).$$

1) Vì C nằm trên tia Oz nên $C(0;0;m)$ với $m > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (4;0;0)$, $\overrightarrow{OB} = (6;6;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] = (0;0;24)$, $\overrightarrow{OC} = (0;0;m)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC} = 24m$.

Do đó $V_{OABC} = \frac{1}{6}.24m = 8 \Leftrightarrow m = 2$. Vậy $C(0;0;2)$.

2) Theo giả thiết ta có $M(x;0;0)$. Ta có tam giác AMB cân tại M nên ta có:

$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 = (x-6)^2 + 6^2 \Leftrightarrow x = 14 \Rightarrow M(14;0;0)$

Gọi $N(0;0;n)$, suy ra $\overrightarrow{AM} = (10;0;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right] = (0;0;60)$

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AN} = 60n \Rightarrow V_{ABMN} = 10|n|$

Suy ra $V_{ABMN} = 20 \Leftrightarrow n = \pm 2$. Vậy $N(0;0;\pm 2), M(14;0;0)$.

Ví dụ 3.1.3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $A(1;0;1)$, $B(2;0;0), C(0;1;0)$. Thể tích của khối lăng trụ bằng 3.

1) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của lăng trụ,

2) Xác định tọa độ điểm cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(1;0;-1), \overrightarrow{AC}(-1;1;-1), \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (1;2;1)$. Do đó $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là 3 nên $AA' = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = \sqrt{6}$.

Từ $\overrightarrow{AA'} = t.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (t;2t;t)$ suy ra $|t| = 1$.

- Nếu $t = 1$ thì $A'(2;2;2), B'(3;2;1), C'(1;3;1)$.
- Nếu $t = -1$ thì $A'(0;-2;0), B'(1;-2;-1), C'(-1;-1;-1)$.

2) Điểm I cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ là trung điểm của đường nối tâm hai đáy.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC, B'C'.

- Với $B'(3;2;1), C'(1;3;1)$ thì $M\left(1;\frac{1}{2};0\right), M'\left(2;\frac{5}{2};1\right) \Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.
- Với $B'(1;-2;-1), C'(-1;-1;-1)$ thì $M'\left(0;-\frac{3}{2};-1\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4.1.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;2;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$. Lập phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt đường thẳng d tại điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện có thể tích bằng $\frac{19}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;3;0), \overrightarrow{AC} = (-2;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (3;2;4)$

Do $\Delta \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{u_\Delta} = (3;2;4)$

Vì $D \in d$ nên $D(1+2t;-1+t;2+3t) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (2t-1;t-2;3t+2)$

Suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|20t+1| = \frac{19}{6}$

Suy ra $t = -1, t = \frac{9}{10}$.

- $t = -1$, ta có $D(-1;-2;-1)$ và phương trình $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$
- $t = \frac{9}{10}$, ta có $D\left(\frac{14}{5};-\frac{1}{10};-\frac{7}{10}\right)$ và phương trình Δ là:

$$\frac{x-\frac{14}{5}}{3} = \frac{y+\frac{1}{10}}{3} = \frac{z+\frac{7}{10}}{4}.$$

Ví dụ 5.1.3. Cho hình chóp S.ABCD với $A(4;-1;2), B(-1;0;-1), C(0;0;-2)$ và $D(10;-2;4)$. Gọi M là trung điểm CD. Biết SM vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và thể tích khối chóp S.ABCD bằng 66 (đvtt). Tìm tọa độ điểm S.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5;1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-4;1;-4), \overrightarrow{AD} = (6;-1;2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1;-8;-1)$, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = 0$.

Do đó A, B, C, D đồng phẳng và $\vec{n} = (1;8;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABCD)

Vì M là trung điểm CD nên $M(5;-1;1)$, suy ra phương trình SM:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{1}$$

Do đó $S(5+t;-1+8t;1+t)$

Ta có: $\overrightarrow{DB} = (-11;2;-5)$, $\overrightarrow{DC} = (-10;2;-6) \Rightarrow \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} = (-2;-16;-2)$

Suy ra $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DB}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{66}$

Nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SM.S_{ABCD} = \frac{1}{2}SM.\sqrt{66} = 66 \Rightarrow SM = 2\sqrt{66}$

$\Leftrightarrow t^2 + (8t)^2 + t^2 = 4.66 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

Từ đó ta tìm được hai điểm $S(7;15;3)$ và $S(3;-17;-1)$.

Ví dụ 6.13. Trong mặt phẳng Oxyz cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$. Và hai điểm $A(-2;1;1), B(-3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho tam giác ABM có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $M(-2+t;1+3t;-5-2t)$; $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;1)$, $\overrightarrow{AM} = (t;3t;-2t-6)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = (t+12;-t-6;-t)$ nên $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}\sqrt{3t^2 + 36t + 180}$

Mà $S_{\Delta AMB} = 3\sqrt{5}$ nên ta có: $t^2 + 12t + 60 = 60 \Leftrightarrow t = 0, t = -12$

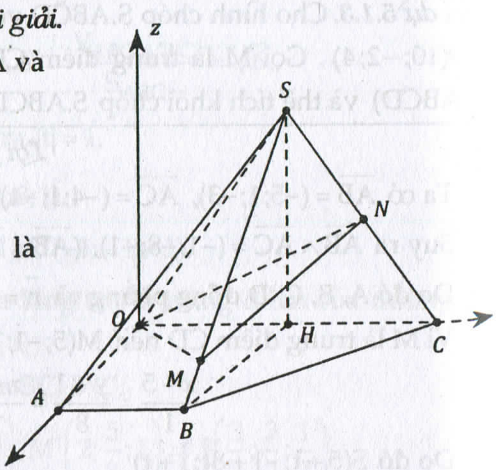
Từ đó ta tìm được hai điểm $M(-2;1;-5)$ và $M(-14;-35;19)$.

Ví dụ 7.1.3. Trong không gian Oxyz cho hình chóp S.OABC có đáy OABC là hình thang vuông tại O và $A(3;0;0)$, $AB = OA = \frac{1}{2}OC$, $S(0;3;4)$ và $y_C > 0$.

1) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại và tính thể tích của hình chóp S.OABC.

2) Một mặt phẳng (α) đi qua O và vuông góc với SA cắt SB, SC tại M và N. Tính thể tích khối chóp SOMN.

Lời giải.



1) Do ABCD là hình thang vuông tại A và O, đồng thời $A \in Ox, y_C > 0, OC = 6$

Nên ta suy ra được $C(0;6;0)$.

Tương tự ta có: $B(3;3;0)$.

Vì $S(0;3;4)$, nên ta gọi $H(0;3;0)$ là trung điểm OC thì ta có $SH \perp (OABC)$

Ta có: $S_{OABC} = \frac{OA(AB+OC)}{2} = \frac{27}{2}$,

$SH = 4$

nên thể tích khối chóp S.OABC là:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{OABC} = \frac{1}{3}.4.\frac{27}{2} = 18$ (đvtt).

2) Ta có: $\overrightarrow{SB} = (3;-3;-4)$, suy ra phương trình mặt phẳng (α): $3x - 3y - 4z = 0$.

Vì $\overrightarrow{SB} = (3;0;-4)$, $\overrightarrow{SC} = (0;3;-4)$ nên ta có phương trình

$$SB: \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 \\ z = 4 - 4t \end{cases} \text{ và } SC: \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 + 3t' \\ z = -4t' \end{cases}.$$

Từ đó ta tìm được các giao điểm của (α) với SB, SC là:

$M(3;3;0)$ và $N(0;\frac{96}{7};-\frac{72}{7})$

Suy ra $\overrightarrow{OS} = (0;3;4)$, $\overrightarrow{OM} = (3;3;0)$, $\overrightarrow{ON} = \left(0;\frac{96}{7};-\frac{72}{7}\right)$

$\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{OM} = (-12;12;-9)$, $(\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{OM})\overrightarrow{ON} = \frac{1800}{7}$.

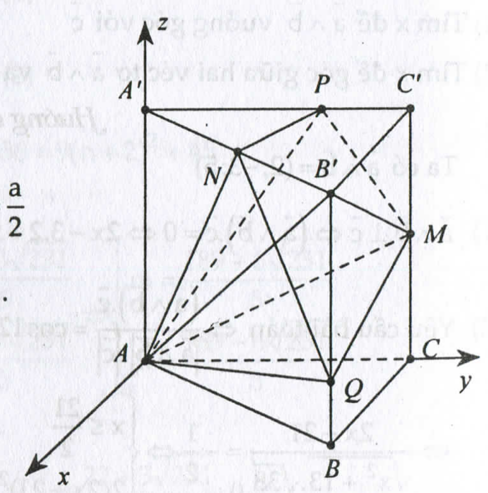
Vậy $V_{SOMN} = \frac{300}{7}$ (đvtt).

Ví dụ 8.1.3. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm CC', biết $AM \perp B'M$. Chọn hệ trục Oxyz sao cho $A \equiv O$, C thuộc tia Ox, A' thuộc tia Oz và B thuộc miền góc xOy.

1) Xác định tọa độ các đỉnh của lăng trụ,

2) Trên các cạnh A'B', A'C', BB' lần lượt lấy các điểm N, P, Q thỏa $A'N = NB'$, $A'P = 2C'P$, $B'Q = 3BQ$. Tính thể tích khối đa diện AMPNQ.

Lời giải



Đặt $AA' = 2x, x > 0$

1) Ta có $A(0;0;0), C(0;a;0)$, $A'(0;0;2x), C'(0;a;2x)$

Gọi K là hình chiếu của B lên Oy,

ta có: $BK = AB.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AK = \frac{a}{2}$

Nên $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2x\right)$.

Suy ra $M(0;a;x) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;a;x)$,

$\overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = \frac{a^2}{2} - x^2$. Mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = 0$ nên suy ra $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $A'\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$ và $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$

2) Ta có $\overrightarrow{A'N}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{A'P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}\Rightarrow P\left(0;\frac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{B'Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{B'B}\Rightarrow Q\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$ và $M\left(0;a;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(0;a;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AP}=\left(0;\frac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$,

$$\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{6}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}=-\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3;\ \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Do đó $V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{1}{6}.\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3$; $V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$

Vậy $V_{AMPNQ}=V_{A.MPQ}+V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}.\frac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

🕮 BÀI TẬP

Bài 1.1.3. Trong không gian Oxyz cho các véc tơ:

$$\vec{a}=(2;3;1),\ \vec{b}=(-3;-2;0),\ \vec{c}=(x;2;-3)$$

1) Tìm x để $\vec{a}\wedge\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$

2) Tìm x để góc giữa hai véc tơ $\vec{a}\wedge\vec{b}$ và $\vec{c}$ bằng 120^0.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{a}\wedge\vec{b}=(2;-3;5)$

1) $\vec{a}\wedge\vec{b}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).\vec{c}=0\Leftrightarrow 2x-3.2+5.(-3)=0\Leftrightarrow x=\frac{21}{2}$

2) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\frac{\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).\vec{c}}{\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|.\left|\vec{c}\right|}=\cos 120^0=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-21}{\sqrt{x^2+13}.\sqrt{38}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{21}{2}\\2(2x-21)^2=19(x^2+13)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{21}{2}\\11x^2+168x-635=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-84\pm\sqrt{14041}}{11}.$$

Bài 2.1.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(3;-2;4)$

1) Tìm tọa độ các hình chiếu của A lên các trục tọa độ và các mặt phẳng tọa độ.

2) Tìm $M\in Ox, N\in Oy$ sao cho tam giác AMN vuông cân tại A

3) Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B(-1;4;-4)$.

Hướng dẫn giải

1) Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Oa, Oy, Oz. B_1,B_2,B_3 là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ (Oxy),(Oyz),(Ozx).

Ta có: $A_1(3;0;0), A_2(0;-2;0), A_3(0;0;4)$

và $B_1(3;-2;0), B_2(3;0;4), B_3(0;-2;4)$

2) Do $M\in Ox\Rightarrow M(m;0;0)$, $N\in Oy\Rightarrow N(0;n;0)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(m-3;2;-4)$, $\overrightarrow{AN}=(-3;n+2;-4)$

Tam giác AMN vuông cân tại A nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=0\\AM^2=AN^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3(m-3)+2(n+2)+16=0\\(m-3)^2+2^2+(-4)^2=(-3)^2+(n+2)^2+(-4)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-3=\frac{2(n+2)+16}{3}\quad(1)\\\left[\frac{2(n+2)+16}{3}\right]^2=(n+2)^2+5\quad(2)\end{cases}$$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow 4(n+2)^2+64(n+2)+256=9(n+2)^2+45$

$\Leftrightarrow 5(n+2)^2-64(n+2)-211=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n+2=\frac{32+3\sqrt{231}}{5}\\n+2=\frac{32-3\sqrt{231}}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=\frac{22+3\sqrt{231}}{5}\\n=\frac{22-3\sqrt{231}}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{189+6\sqrt{231}}{5}\\m=\frac{189-6\sqrt{231}}{5}\end{array}\right..$$

Vậy có hai bộ thỏa yêu cầu bài toán:

$$M_1\left(\frac{189+6\sqrt{231}}{15};0;0\right),N_1\left(0;\frac{22+3\sqrt{231}}{5};0\right)$$

hoặc $M_2\left(\frac{189-6\sqrt{231}}{15};0;0\right),N_2\left(0;\frac{22-3\sqrt{231}}{5};0\right)$.

3) Vì $E\in(Oyz)$ nên $E(0;x;y)$

Suy ra $\overrightarrow{AE}=(-3;y+2;z-4)$, $\overrightarrow{BE}=(1;y-4;z+4)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]=(8y+6z-8;4z+8;10-4y)$$

Nên từ giả thiết bài toán ta có: $\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|=3\sqrt{29}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\end{cases}$

$$AE^2=BE^2\Leftrightarrow 9+(y+2)^2+(z-4)^2=1+(y-4)^2+(z+4)^2\Leftrightarrow y=\frac{4z+1}{3}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\Leftrightarrow(8y+6z-8)^2+(4z+8)^2+(10-4y)^2=1044$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{50z-16}{3}\right)^2+(4z+8)^2+\left(\frac{26-16z}{3}\right)^2-1044=0\Leftrightarrow z=2,z=-\frac{34}{25}$$

- $z=2\Rightarrow y=3$ nên $E(0;3;2)$
- $z=-\frac{34}{25}\Rightarrow y=-\frac{37}{25}$ nên $E\left(0;-\frac{37}{25};-\frac{34}{25}\right)$.

Bài 3.1.3. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm

$$A(1;2;1),B(2;-1;-3),C(-2;0;3),D(0;3;4)$$

1) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng. Tính thể tích của tứ diện ABCD

2) Tính chiều cao vẽ từ B của tam giác BCD và chiều cao của tứ diện ABCD vẽ từ A.

3) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính cô sin của góc giữa hai đường thẳng CM và BN.

4) Tìm E trên đường thẳng AB sao cho tam giác ECD có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{BC}=(-4;1;6)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;4;7)$, $\overrightarrow{BA}=(-1;3;4)$

Suy ra $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=(-17;16;-14)$, $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BA}=9\neq 0$

Vậy A,B,C,D không đồng phẳng và thể tích khối tứ diện ABCD là:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BA}\right|=\frac{3}{2}\ \text{(đvtt).}$$

2) Ta có: $\overrightarrow{CD}=(2;3;1)\Rightarrow CD=\sqrt{14}, S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right|=\frac{\sqrt{741}}{2}$

Suy ra đường cao $BB'=\frac{2S_{\Delta BCD}}{CD}=\sqrt{\frac{741}{14}}$.

Chiều cao của hình chóp vẽ từ A là: $h=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{9}{\sqrt{241}}$.

3) Ta có $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};-1\right)$, $N\left(-1;\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{CM}=\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2};-4\right),\overrightarrow{BN}=\left(-3;\frac{5}{2};\frac{13}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}=-\frac{141}{4}$

Nên $\cos\left(\widehat{CM,BN}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BN}\right|}{CM.BN}=\frac{141}{2\sqrt{6555}}$.

4) Ta có phương trình $AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=1-4t\end{cases}$, suy ra $E(1+t;2-3t;1-4t)$

$$\overrightarrow{CE}=(t+3;-3t+2;-4t-2),\ \overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{CD}=(9t+8;-9t-7;9t+5)$$

Suy ra $S_{\Delta CDE}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{CD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{243t^2+360t+138}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{243\left(t+\frac{20}{27}\right)^2+\frac{14}{3}}\geq\frac{\sqrt{42}}{6}$$

Vậy $S_{\Delta CDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\left(\frac{7}{27};\frac{38}{9};\frac{107}{27}\right)$.

Bài 4.1.3. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$.

1) Chứng minh rằng các điểm A, B, C không thẳng hàng.

2) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

3) Tính $\cos A,\sin B,\tan C$ của tam giác ABC.

4) Tính độ dài đường cao từ đỉnh A, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

5) Tìm tọa độ giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc A với đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(4;0;-3),\overrightarrow{AC}(6;8;0)$ nên các điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, tức là $\begin{cases}4=6k\\0=8k\\-3=0.k\end{cases}$ (vô lí).

Vậy A, B, C không thẳng hàng.

2) Vì A, B, C không thẳng hàng nên ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}, \text{ hay } \begin{cases}7-x_D=4\\9-y_D=0\\1-z_D=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=9\\z_D=4\end{cases}\Rightarrow D(3;9;4).$$

3) Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5,\left|\overrightarrow{AC}\right|=10,\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{77}$.

Vậy $\cos A=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{24}{50}=\dfrac{12}{25}$.

Tương tự $\cos B=\dfrac{\sqrt{77}}{385},\cos C=\dfrac{38\sqrt{77}}{385}$. Vì $B,C\in(0;\pi)$ nên

+) $\sin B>0\Rightarrow\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{481}{77}}$.

+) $\tan C,\cos C$ cùng dấu $\tan C=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 C}-1}=\dfrac{\sqrt{481}}{38}$.

4) Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}BA.BC.\sin B=\dfrac{1}{2}5.\sqrt{77}.\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{481}{77}}=\sqrt{481}$.

Do đó

+) $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2S}{BC}=2\sqrt{\dfrac{481}{77}}$.

+) $R=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{AC}{2\sin B}=25.\sqrt{\dfrac{77}{481}}$.

+) $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{2S}{AB+BC+CA}=\dfrac{2\sqrt{481}}{15+\sqrt{77}}$.

Chú ý: Có thể tính diện tích bằng công thức $S=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

5) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của phân giác trong, phân giác ngoài góc A với đường thẳng BC.

Theo tính chất phân giác, ta có $\dfrac{EB}{EC}=\dfrac{FB}{FC}=\dfrac{AB}{AC}$

+) Vì E nằm trong đoạn BC nên $\overrightarrow{EC}=-2\overrightarrow{EB}$

Giả sử $E(x_E;y_E;z_E)$ thì $\overrightarrow{EC}(7-x_E;9-y_E;1-z_E),\overrightarrow{EB}(5-x_E;1-y_E;-2-z_E)$

Nên $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{EB}$ tương đương với

$$\begin{cases}7-x_E=-2(5-x_E)\\9-y_E=-2(1-y_E)\\1-z_E=-2(-2-z_E)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=\dfrac{17}{3}\\y_E=\dfrac{11}{3}\\z_E=-1\end{cases}\Rightarrow E\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{11}{3};-1\right).$$

Tương tự, do F nằm ngoài đoạn BC nên $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FB}$, từ đó ta tìm được tọa độ điểm F là $F(3;-7;3)$.

Bài 5.1.3. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có

$$A(2;3;1),B(-1;2;0),C(1;1;-2).$$

1) Tìm tọa độ chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC

2) Tìm tọa độ H là trực tâm của tam giác ABC.

3) Tìm tọa độ I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

4) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Hướng dẫn giải

1) Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;-1;-2)$, phương trình $BC:\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=-2t\end{cases}$

Suy ra $K(2t-1;2-t;-2t),\overrightarrow{AK}(2t-3;-1-t;-1-2t)$

Vì $AK\perp BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow(2t-3).2+(-1-t).(-1)+(-1-2t).(-2)=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$. Tọa độ điểm K cần tìm là $K\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

2) Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC. Ta có

$$\overrightarrow{AH}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BH}(x+1;y-2;z)$$
$$\overrightarrow{AB}(-3;-1;-1),\overrightarrow{AC}(-1;-2;-3),\overrightarrow{BC}(2;-1;-2)$$

Tích có hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&-3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&-3\\-3&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&-2\end{vmatrix}\right)=(1;-8;5).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp CA \\ H \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right)$.

3) Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$$\overrightarrow{AI}(x-2;y-3;z-1), \overrightarrow{BI}(x+1;y-2;z), \overrightarrow{CI}(x-1;y-1;z+2).$$

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ I \in (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right)$.

4) Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ thỏa mãn

$$G\left(\frac{2-1+1}{3}; \frac{3+2+1}{3}; \frac{1+0-2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3}\right)$$

Do đó $\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{15}; \frac{1}{15}; 0\right), \overrightarrow{GI}\left(\frac{4}{15}; \frac{1}{30}; 0\right)$ nên $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$, tức là ba điểm G, H, I nằm trên một đường thẳng.

Bài 6.1.3. Cho tam giác đều ABC có $A(5;3;-1), B(2;3;-4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

1) Tìm tọa độ điểm D biết ABCD là tứ diện đều.

2) Tìm tọa độ điểm S biết SA, SB, SC đôi một vuông góc.

Hướng dẫn giải

Vì $C \in (Oxy)$ nên $C(x;y;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;0;-3), \overrightarrow{AC}(x-5;y-3;1), \overrightarrow{BC}(x-2;y-3;4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB = AC = BC$, do đó

$$\begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1^2 = 18 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 4^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 4 \\ x = 1; y = 2 \end{array}\right..$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1;2;0)$.

1) Gọi $D(x;y;z)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}(x-5;y-3;z+1), \overrightarrow{BD}(x-2;y-3;z+4), \overrightarrow{CD}(x-1;y-2;z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên ABCD là tứ diện đều khi và chỉ khi $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ (x-5)^2 + (13-5x)^2 + (2-x)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2 - 16x + 20 = 0$ ta được $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{10}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2;\ 6;\ -1)$ hoặc $D\left(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

2) Gọi $S(x;y;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AS}(x-5;y-3;z+1), \overrightarrow{BS}(x-2;y-3;z+4), \overrightarrow{CS}(x-1;y-2;z)$

SA, SB, SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BS} = 0 \\ \overrightarrow{BS}.\overrightarrow{CS} = 0 \\ \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{AS} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-2) + (y-3)^2 + (z+1)(z+4) = 0 \\ (x-2)(x-1) + (y-3)(y-2) + (z+4)z = 0 \\ (x-1)(x-5) + (y-2)(y-3) + z(z+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 7x - 6y + 5z = -23 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 5y + 4z = -8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4z = 12 \\ -3x - 3z = -3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5y + z = -11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5z + 11 \\ x = 1 - z \\ 3z^2 + 10z + 8 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2 + 10z + 8 = 0$ ta được $z = -2; z = -\frac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3;1;-2), S\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Bài 7.1.3. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, A' \in Oz$ và $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$.

1) Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp.

2) Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E \perp A'C$

3) Tìm điểm M thuộc A'C, N thuộc BD sao cho $MN \perp BD, MN \perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau A'C và BD.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $A(0;0;0), B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;3)$.

Hình chiếu của C lên (Oxy) là C, hình chiếu của C lên Oz là A nên $C(1;2;0)$.

Hình chiếu của B', C', D' lên mp(Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B, C, D và A' nên $B'(1;0;3)$, $C'(1;2;3)$, $D'(0;2;3)$.

2) Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0;2;z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1;2;z-3)$

Mà $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$ nên $B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E}.\overrightarrow{A'C} = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 4 - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$. Vậy $E(0;2;4)$.

3) Đặt $\overrightarrow{A'M} = x.\overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{BN} = y.\overrightarrow{BD}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x.\overrightarrow{A'C} = (x;2x;3-3x)$,

suy ra $M(x;2x;3-3x)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{BD} = (1-y;2y;0) \Rightarrow N(1-y;2y;0)$

Theo giả thiết của đề bài, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ (*)

Mà $\overrightarrow{MN} = (1-x-y;2y-2x;3x-3)$, $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;2;0)$

$$\text{Nên (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9=0 \\ -1+x+y+4y-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y=-10 \\ -3x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{53}{61} \\ y = \frac{44}{61} \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{53}{61};\frac{106}{61};\frac{24}{61}\right)$, $N\left(\frac{17}{61};\frac{88}{61};0\right)$.

Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng A'C, BD nên

$$d(A'C,BD) = MN = \sqrt{(1-x-y)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \frac{6\sqrt{61}}{61}.$$

Bài 8.1.3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $A \equiv O$, B thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz. Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

1) Xác định tọa độ các đỉnh của hình chóp

2) Chứng minh rằng ΔSCD vuông, tính diện tích tam giác SCD và tính cô sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

3) Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

4) Trên các cạnh SA, SB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q thỏa SM = MA, SN = 2NB, BP = 3PC, CQ = 4QD. Chứng minh rằng M, N, P, Q không đồng phẳng và tính thể tích khối chóp MNPQ.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0)$. Đặt $SA = x \Rightarrow S(0;0;x)$

$\overrightarrow{BD} = (-a;2a;0), \overrightarrow{SC} = (a;a;-x) \Rightarrow DB = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{x^2 + 2a^2}; \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{SC} = a^2$

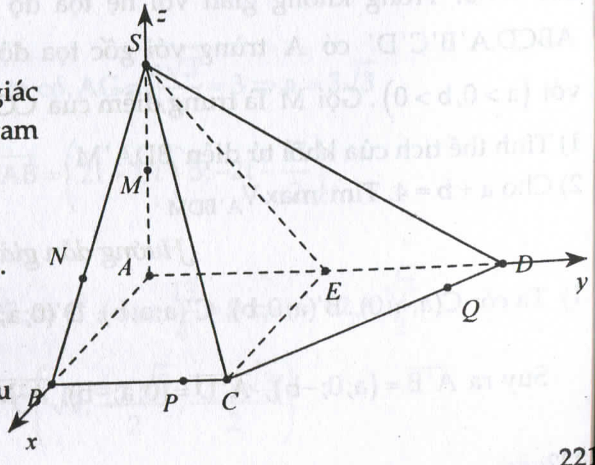
$$\text{Nên } \cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}\right|}{SC.BD} = \frac{a}{\sqrt{5(x^2+2a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2a^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = 2a \Rightarrow S(0;0;2a)$.

2) Ta có $\overrightarrow{CS} = (-a;-a;2a), \overrightarrow{CD} = (-a;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

Do đó: $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CS.CD = \frac{1}{2}.a\sqrt{6}.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{3}$

Gọi $\beta = \widehat{((SCD),(SAB))}$.



Ta có hình chiếu của tam giác SCD lên mặt phẳng (SAB) là tam giác SAB nên ta suy ra

$$\cos\beta = \frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{\frac{1}{2}a.2a}{a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Ta có $E(0;a;0)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SBCE

Khi đó $\begin{cases} IB^2 = IS^2 \\ IC^2 = IS^2 \\ IE^2 = IS^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 3a \\ -x - y + 2z = a \\ -2y + 4z = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \\ z = a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right).$

Bán kính $R = IE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

4) Ta có $M(0;0;a)$

Do $\overrightarrow{SN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SB} \Rightarrow N\left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{2a}{3}\right)$, $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow P\left(a; \frac{3a}{4}; 0\right)$

$\overrightarrow{CQ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} \Rightarrow Q\left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; 0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2a}{3}; 0; -\frac{a}{3}\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(a; \frac{3a}{4}; -a\right)$, $\overrightarrow{MQ} = \left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; -a\right)$

$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = \left(\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{3}; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}\right).\overrightarrow{MQ} = \frac{3a^3}{20} \neq 0$

nên M, N, P, Q không đồng phẳng.

Vậy $V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP}\right).\overrightarrow{MQ}\right| = \frac{a^3}{40}$.

Bài 9.1.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0), D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $(a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm của CC'.

1) Tính thể tích của khối tứ diện BDA'M.

2) Cho $a + b = 4$. Tìm $\max V_{A'BDM}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $C(a;a;0)$, $B'(a;0;b)$, $C'(a;a;b)$, $D'(0;a;b) \Rightarrow M(a;a;\frac{b}{2})$

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-b)$, $\overrightarrow{A'D} = (0;a;-b)$, $\overrightarrow{A'M} = \left(a;a;-\frac{b}{2}\right)$

nên $\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}\right] = (ab;ab;a^2) \Rightarrow \overrightarrow{A'M}.\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}\right] = \frac{3a^2b}{2}$.

Vậy $V_{A'MBD} = \frac{a^2b}{4}$.

2) Do $a, b > 0$ nên áp dụng BĐT Cô si ta có:

$4 = a + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b} \Rightarrow a^2b \leq \frac{256}{27}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$. Vậy $\max V_{A'BDM} = \frac{64}{27}$.

Bài 10.1.3. Trong không gian Oxyz cho tứ diện đều ABCD có $A(3;-1;2)$ và $G(1;1;1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng BC đi qua $M\left(4;4;-\frac{7}{2}\right)$ Xác định tọa độ các đỉnh còn lại và tính thể tích khối tứ diện đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AG} = (-2;2;-1)$, $\overrightarrow{AM} = (1;5;\frac{11}{2})$

Suy ra $\overrightarrow{n}_{ABC} = \overrightarrow{AG} \wedge 2\overrightarrow{AM} = (-12;-24;-24)$

Phương trình $(ABC): x + 2y + 2z - 5 = 0$.

$\overrightarrow{u}_{BC} = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{n}_{ABC} = (6;3;-6)$

Phương trình BC: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = -\frac{7}{2} - 2t \end{cases}$

Gọi a là cạnh của tứ diện ABCD, ta có $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 3 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$

Ta có: $B\left(4 + 2t; 4 + t; -\frac{7}{2} - 2t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(2t + 1; t + 5; -2t - \frac{11}{2}\right)$

Nên ta được phương trình:

$(2t+1)^2 + (t+5)^2 + \left(2t + \frac{11}{2}\right)^2 = 27 \Leftrightarrow t^2 + 4t + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow t = -2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $B\left(-\sqrt{3}; \frac{4 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\sqrt{3}; \frac{4 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}\right)$

Do DG ⊥ (ABC) nên phương trình GD: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Suy ra $D(1+t;1+2t;1+2t)$

Mà $GD=\sqrt{DA^2-AG^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}\Rightarrow 3|t|=3\sqrt{2}\Rightarrow t=\pm\sqrt{2}$

Do đó $S(1+\sqrt{2};1+2\sqrt{2};1+2\sqrt{2})$ hoặc $S(1-\sqrt{2};1-2\sqrt{2};1-2\sqrt{2})$.

Thể tích của tứ diện: $V=\dfrac{1}{3}DG.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27\sqrt{6}}{4}$ (đvtt).

§ 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Để lập phương trình mặt phẳng (α), ta có các cách sau:

Cách 1: Tìm một điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ mà mặt phẳng (α) đi qua và một VTPT $\vec{n}=(a;b;c)$. Khi đó phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Một số lưu ý khi tìm VTPT của mặt phẳng (α):

- Nếu hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trên (α) thì $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{n}$ là VTPT của (α).
- Nếu mặt phẳng (α) đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C thì $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}$ là VTPT của (α).
- Nếu (α)//(β) thì $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}$.
- Nếu Δ ⊥ (α) thì $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_\Delta}$.
- Nếu (α) ⊥ (β) thì $\overrightarrow{n_\beta}//(\alpha)$.
- Nếu $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ thì phương trình (ABC):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Cách 2: Giả sử phương trình (α) có dạng: $ax+by+cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

Dựa vào giả thiết của đề bài ta tìm được ba trong bốn ẩn a, b, c, d theo ẩn còn lại. Chẳng hạn a = mb, c = nb, d = pb. Khi đó phương trình (α) là: $mx+y+nz+p=0$.

Chú ý: Nếu mặt phẳng (α) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ thì phương trình của (α) có dạng: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Ví dụ 1.2.3. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1) (α) đi qua ba điểm $A(1;1;1),B(2;-1;3),C(-1;2;-1)$,

2) (α) đi qua hai điểm A, B và song song với OC

3) (α) đi qua $M(1;1;1)$, vuông góc với $(\beta):2x-y+z-1=0$ và song song với $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$,

4) (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$, $(Q):2x-y+3z-4=0$ và khoảng cách từ O đến (α) bằng $\sqrt{26}$.

Lời giải.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;1;-2)$, suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(2;-2;-3)$

Phương trình $(\alpha):2x-2y-3z+3=0$.

2) Ta có $\overrightarrow{OC}=(-1;2;-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OC}=(-2;-1;0)$

Vì (α) đi qua A, B và song song với CD

nên (α) nhận $\vec{n}=-\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OC}=(2;1;0)$ làm VTPT.

Suy ra phương trình $(\alpha):2x+y-3=0$.

3) Ta có: $\overrightarrow{n_\beta}=(2;-1;1)$, $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-3)$

Do $\begin{cases}(\alpha)\perp(\beta)\\(\alpha)//\Delta\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}\wedge\overrightarrow{u_\Delta}=(2;8;4)$.

Phương trình $(\alpha):x+4y+2z-7=0$.

4) Ta có $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{n_2}=(2;-1;3)$ lần lượt là VTPT của (P) và (Q).

Vì (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên (α) nhận véc tơ $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=(4;-1;-3)$ làm VTPT.

Suy ra phương trình (α) có dạng: $4x-y-3z+d=0$.

Mặt khác: $d(O,(\alpha))=\sqrt{26}$ nên ta có: $\dfrac{|d|}{\sqrt{26}}=\sqrt{26}\Rightarrow d=\pm 26$.

Vậy phương trình $(\alpha):4x-y-3z\pm 26=0$.

Ví dụ 2.2.3. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết:

1) (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):x-3z-2=0$; $(\beta):y-2z+1=0$

và khoảng cách từ $M\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ đến (P) bằng $\frac{7}{6\sqrt{3}}$.

2) (P) đi qua hai điểm $A(1;2;1), B(-2;1;3)$ sao cho khoảng cách từ $C(2;-1;1)$ đến (P) bằng khoảng cách từ $D(0;3;1)$ đến (P).

Lời giải.

1) Giả sử $(P): ax+by+cz+d=0$.

Ta có $A(2;-1;0), B(5;1;1)$ là điểm chung của (α) và (β)

Vì (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A, B \in (P)$

Suy ra $\begin{cases} 2a-b+d=0 \\ 5a+b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a+d \\ c=-7a-2d \end{cases}$.

Mặt khác: $d(M,(P)) = \frac{7}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{7}{6\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |c+2d| = \frac{7}{3\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow 27(c+2d)^2 = 49(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow 27.49a^2 = 49\left[a^2+(2a+d)^2+(7a+2d)^2\right]$

$\Leftrightarrow 27a^2+32ad+5d^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-d \\ a=-\frac{5}{27}d \end{array}\right.$

- $d=-a \Rightarrow b=a; c=-5a$. Suy ra phương trình (P) là:
  $ax+ay-5az-a=0 \Leftrightarrow x+y-5z-1=0$.
- $d=-\frac{27}{5}a \Rightarrow b=-\frac{17}{5}a; c=-\frac{36}{5}a$. Suy ra phương trình (P) là:
  $5x-17y-36z-27=0$.

2) Giả sử $(P): ax+by+cz+d=0$

Vì $A, B \in (P) \Rightarrow \begin{cases} a+2b+c+d=0 \\ -2a+b+3c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-b+2c}{3} \\ d=-\frac{5b+5c}{3} \end{cases}$.

Mặt khác: $d(C,(P)) = d(D,(P)) \Leftrightarrow |2a-b+c+d| = |3b+c+d|$

$\Leftrightarrow |5b-c| = |2b-c| \Leftrightarrow c=\frac{7}{2}b, c=0$

- Với $c=\frac{7}{2}b \Rightarrow a=2b; d=-\frac{15}{2}b \Rightarrow (P): 4x+2y+7z-15=0$

- Với $b=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}c; d=-\frac{5}{3}c \Rightarrow (P): 2x+3z-5=0$.

Ví dụ 2.2.3. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1};\ d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-4}$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và d_1.

2) Chứng minh rằng d₁ và d₂ cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d₁ và d₂.

Lời giải.

Ta có: Đường thẳng d₁ đi qua $M(1;-1;-2)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-1)$

Đường thẳng d₂ đi qua $N(2;-2;1)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-4)$

1) Ta có: $\overrightarrow{AM}=(0;-3;-5)$

Do (P) đi qua A và d_1 nên $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u_1} = (-8;10;-6)$

Suy ra phương trình $(P): 4x-5y+3z-3=0$.

2) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+2t=2+t' \\ -1+t=-2+2t' \\ -2-t=1-4t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-t'=1 \\ t-2t'=-1 \\ -t+4t'=3 \end{cases} \Leftrightarrow t=t'=1$

Suy ra d₁ và d₂ cắt nhau tại $E(3;0;-3)$.

Ta có $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (-2;7;3)$

Phương trình (Q): $2x-7y-3z-15=0$.

Ví dụ 4.2.3. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1},\ d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1} \text{ và } d_3: \begin{cases} x=-2t \\ y=-1-4t \\ z=-1+2t \end{cases}.$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d₂ và cắt d₁, d₃ lần lượt tại A, B sao cho $AB=\sqrt{13}$.

2) Gọi (P) là mặt phẳng chứa d₁ và d₃. Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d₂ và tạo với mặt phẳng (P) một góc φ thỏa $\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{145}}$.

Lời giải.

1) Ta có $A \in d_1 \Rightarrow A(1+a;-1+2a;1-a)$, $B \in d_3 \Rightarrow B(-2b;-1-4b;-1+2b)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-a-2b-1;-2(a+2b);a+2b-2)$, đặt $x=a+2b$

Từ $AB=\sqrt{13} \Rightarrow (x+1)^2+4x^2+(x-2)^2=13 \Leftrightarrow x=-1, x=\frac{4}{3}$

- Với $x=-1\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0;2;-3)$,

  ta có $\vec{u}=(2;3;-1)$ là VTCP của d₂ và $A(-1;1;0)\in d_2\Rightarrow A\in(\alpha)$

  Suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(7;-6;-4)$ là VTPT của (α).

  Phương trình $(\alpha): 7x-6y-4z+13=0$.

- Với $x=\frac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\frac{7}{3};-\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

  Suy ra $\vec{n}=\left[-3\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=(-14;11;5)$ là VTPT của (α).

  Phương trình $(\alpha): 14x-11y-5z-25=0$.

2) Đường thẳng d_1 đi qua $M(1;-1;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$

Đường thẳng d_2 đi qua $E(-1;1;0)$, có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(2;3;-1)$

Đường thẳng d_3 đi qua $N(0;-1;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_3}=(-2;-4;2)$

Ta có $\overrightarrow{u_3}=-2\overrightarrow{u_1}\Rightarrow d_1 // d_3$. Do đó $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{MN}=(-4;3;2)$

Vì mặt phẳng (Q) đi qua d_2 nên phương trình (Q) có dạng:

$$ax+by+cz+a-b=0 \qquad (1)$$

với $a^2+b^2+c^2>0$ và $2a+3b-c=0\Leftrightarrow c=2a+3b$.

Mặt khác $\cos\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\dfrac{|4a-3b-2c|}{\sqrt{29(a^2+b^2+c^2)}}=\dfrac{9|b|}{\sqrt{29(5a^2+12ab+10b^2)}}$

Nên ta có: $\dfrac{9|b|}{\sqrt{29(5a^2+12ab+10b^2)}}=\dfrac{6}{\sqrt{145}}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}|b|=2\sqrt{5a^2+12ab+10b^2}\Leftrightarrow 20a^2+48ab-5b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{10}b\\ a=-\frac{5}{2}b\end{array}\right.$$

- $a=\frac{1}{10}b$ ta chọn $b=10\Rightarrow a=1, c=32$.

  Phương trình (Q) là: $x+10y+32z-9=0$.

- $a=-\frac{5}{2}b$ ta chọn $b=-2\Rightarrow a=5, c=4$.

  Phương trình (Q) là: $5x-2y+4z+7=0$.

Ví dụ 5.2.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{3}$ và điểm $M(1;2;0)$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M, song song với Δ và (α) tạo với ba tia Ox, Oy, Oz một tứ diện có thể tích bằng 8.

2) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M, vuông góc với $(P): x+y+z-3=0$ và tạo với Δ một góc φ thỏa $\cos\varphi=\sqrt{\frac{31}{34}}$.

Lời giải.

1) Giả sử (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A\left(\frac{1}{a};0;0\right), B\left(0;\frac{1}{b};0\right), C\left(0;0;\frac{1}{c}\right)$ với $a,b,c>0$

Khi đó, phương trình $(\alpha): ax+by+cz=1$

Vì (α) đi qua M và song song với Δ nên ta có:

$$\begin{cases}a+2b=1\\ -2a+2b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2b+1\\ c=-2b+\frac{2}{3}\end{cases}$$

Mặt khác $V_{OABC}=8\Leftrightarrow\frac{1}{6}OA.OB.OC=8\Leftrightarrow abc=\frac{1}{48}$

$\Leftrightarrow b(2b-1)(2b-\frac{2}{3})=\frac{1}{48}\Leftrightarrow 192b^3-160b^2+32b-1=0$

$$\Leftrightarrow(4b-1)(48b^2-28b+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}\\ b=\frac{7+\sqrt{37}}{24}\Rightarrow a=\frac{5-\sqrt{37}}{12}, c=\frac{1-\sqrt{37}}{12}\\ b=\frac{7-\sqrt{37}}{24}\Rightarrow a=\frac{5+\sqrt{37}}{12}, c=\frac{1+\sqrt{37}}{12}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình mặt cần lập là: $(\alpha_1): 6x+3y+2z-12=0$;

$(\alpha_2): 2(5-\sqrt{37})x+(7+\sqrt{37})y+2(1-\sqrt{37})z-24=0$

Và $(\alpha_3): 2(5+\sqrt{37})x+(7-\sqrt{37})y+2(1+\sqrt{37})z-24=0$.

2) Vì mặt phẳng (β) đi qua M nên phương trình của (β) có dạng:

$a(x-1)+b(y-2)+cz=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a-2b=0$ (*)

với $a^2+b^2+c^2>0$.

Mặt khác, $(\beta)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow a+b+c=0\Leftrightarrow c=-a-b$.

Ta có: $\sin\varphi=\left|\sin(\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_\beta})\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}=\dfrac{|-2a+2b+3c|}{\sqrt{17}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|5a+b|}{\sqrt{34(a^2+ab+b^2)}}$

Mà $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{3}{34}}$ nên ta có: $\frac{|5a+b|}{\sqrt{34(a^2+ab+b^2)}} = \sqrt{\frac{3}{34}}$

$$\Leftrightarrow (5a+b)^2 = 3(a^2+ab+b^2) \Leftrightarrow 22a^2+7ab-2b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{2}{11}b \\ a=-\frac{1}{2}b \end{array}\right.$$.

- $a=\frac{2}{11}b$, ta chọn $b=11 \Rightarrow a=2, c=-13$

  nên phương trình của (β) là: $2x+11y-13z-24=0$.

- $a=-\frac{1}{2}b$, ta chọn $b=-2 \Rightarrow a=1, c=1$

  nên phương trình của (β) là: $x-2y+z+3=0=0$.

> ***Ví dụ 6.2.3.*** Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng (P): $x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng (Q): $2x-y+2z-9=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$.
>
> 1) Gọi (α) là mặt phẳng phân giác của góc họp bởi hai mặt phẳng (P) và (Q). Tìm giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (α).
>
> 2) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời cách $E(8;-2;-9)$ một khoảng lớn nhất.

Lời giải

1) Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có $M \in \Delta$ nên $M(4+t;t;-2t)$

Vì $M \in (\alpha)$ nên ta có: $d(M,(P)) = d(M,(Q))$

$$\Leftrightarrow \frac{|4+t+2t-4t-3|}{3} = \frac{|2(4+t)-t-4t-9|}{3} \Leftrightarrow |t-1| = |3t+1| \Leftrightarrow t=0, t=-1$$

Từ đó ta có được hai điểm M là: $M_1(4;0;0)$ và $M_2(3;-1;2)$.

2) Ta có $A(3;-1;1)$ và $B(-4;1;9)$ là hai điểm thuộc giao của (P) và (Q).

Do đó (β) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) khi và chỉ khi $A, B \in (\beta)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7;2;8)$ nên phương trình AB: $\begin{cases} x=3-7t \\ y=-1+2t, \ t\in\mathbb{R} \\ z=1+8t \end{cases}$

Gọi K là hình chiếu của E lên AB, suy ra

$K(3-7t;-1+2t;1+8t) \Rightarrow \overrightarrow{EK} = (-5-7t;1+2t;10+8t)$

Vì $EK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -7(-5-7t)+2(1+2t)+8(10+8t)=0 \Leftrightarrow t=-1$

Suy ra $K(10;-3;-7)$, $\overrightarrow{EK} = (2;-1;2)$.

Gọi H là hình chiếu của E lên mặt phẳng (β), khi đó: $d(E,(\beta)) = EH \le EK$

Suy ra $d(E,(\beta))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$ hay (β) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với EK

Phương trình $(\beta): 2x-y+2z-9=0$. (ta thấy $(\beta) \equiv (Q)$).

> ***Ví dụ 7.2.3.*** Trong hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}, d_2: \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$ và điểm $A(-2;1;0)$.
>
> Chứng minh A, d_1, d_2 cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác ABC biết đường cao từ B nằm trên d_1 và đường phân giác trong góc C nằm trên d_2.

Lời giải.

Đường thẳng d₁ đi qua M(1;2;4) vàc có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1;1;1)$

Đường thẳng d₂ đi qua N(0;3;2) vàc có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (1;-1;2)$

Gọi I là giao điểm của $d_1, d_2 \Rightarrow I(1;2;4)$

Mặt phẳng (α) chứa d₁, d₂ có $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (3;-1;-2)$ và đi qua I nên phương trình: $3x-y-2z+7=0$.

Ta thấy $A \in (\alpha)$. Vậy A, d_1, d_2 cùng thuộc mp (α)

Xác định điểm C:

Gọi (β) là mp đi qua A và vuông góc với $d_1 \Rightarrow (\beta): x+y+z+1=0$

Có $C = (\beta) \cap (d_2)$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2} \end{cases} \Rightarrow C(-3;6;-4)$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d_2.

Kẻ $AH \perp d_2 \Rightarrow H(t;3-t;2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t+2;2-t;2+2t)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow (t+2)-(2-t)+2(2+2t)=0 \Rightarrow t=-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow H\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{2}{3};\frac{19}{3};\frac{4}{3}\right)$$

Có đường thẳng BC là đường thẳng BA' đi qua C và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{CA'} = \frac{1}{3}(11;1;16)$ chọn $\vec{u}' = (11;1;16)$

Suy ra phương trình BC : $\frac{x+3}{11}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+4}{16}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x+3}{11}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+4}{16}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{29}{5};\frac{34}{5};\frac{44}{5}\right).\text{ Vậy } B\left(\frac{29}{5};\frac{34}{5};\frac{44}{5}\right);C(-3;6;-4).$$

Ví dụ 8.2.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng

$$d_m:\frac{x-4m+3}{2m-1}=\frac{y-2m-3}{m+1}=\frac{z-8m-7}{4m+3}\text{ với } m\notin\left\{-1;-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right\}$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn nằm trong một mặt phẳng cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Lời giải.

Đường thẳng d_m đi qua $A(4m-3;2m+3;8m+7)$ và có VTCP $\vec{u}=(2m-1;m+1;4m+3)$

Giả sử $d_m\subset(\alpha):ax+by+cz+d=0$ với mọi m , khi đó ta có:

$$\begin{cases}a(2m-1)+b(m+1)+c(4m+3)=0\\ a(4m-3)+b(2m+3)+c(8m+7)+d=0\end{cases}\forall m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2a+b+4c)m-a+b+3c=0\\ (4a+2b+8c)m-3a+3b+7c+d=0\end{cases}\forall m$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+4c=0\\ -a+b+3c=0\\ 2a+b+4c=0\\ -3a+3b+7c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=10a\\ c=-3a\\ d=-6a\end{cases}$$

Ta chọn $a=1\Rightarrow b=10,c=-3,d=-6$

Vậy $d_m\subset(\alpha):x+10y-3z-6=0$.

Ví dụ 8.2.3. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(1;1;1),B(-1;0;-2)$, $C(2;-1;0),D(-2;2;3)$.

1) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện và tính thể tích tứ diện ABCD.

2) Lập phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, CD và cắt hai đường thẳng AC, BD lần lượt tại hai điểm M, N thỏa $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1$.

3) Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, (P) là mặt phẳng đi qua G cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B',C',D'. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích lớn nhất.

Lời giải.

1) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-1;-3),\overrightarrow{AC}=(1;-2;-1),\overrightarrow{AD}=(-3;1;2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-5;-5;5)\Rightarrow(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=20\neq0$

Nên A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.

Thể tích tứ diện ABCD là: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{10}{3}$.

2) Ta có $\overrightarrow{BD}=(-1;2;5)$ nên $BD=\sqrt{30},AC=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{CD}=(-4;3;3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(6;18;-10)$

Vì (α) song song với AB, CD nên $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;9;-5)$.

Vì MN, AB, CD lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song gồm: Mặt phẳng đi qua AB và song song với CD, mặt phẳng đi qua CD và song song với AB và mặt phẳng (α) nên theo định lí Talet đảo trong không gian ta suy ra:

$$\frac{BN}{BD}=\frac{AM}{AC}\Leftrightarrow\frac{BN}{\sqrt{30}}=\frac{AM}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow BN=\sqrt{5}AM\Leftrightarrow BN^2=5AM^2$$

Mặt khác: $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1\Leftrightarrow AM^4-AM^2=BN^2=5AM^2\Rightarrow AM^2=6$

Ta có phương trình $AC:\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t\\ z=1-t\end{cases}\Rightarrow M(1+t;1-2t;1-t)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(t;-2t;-t)\Rightarrow AM^2=6\Leftrightarrow t=\pm1$.

- $t=1$, ta có $M(2;-1;0)\equiv C$ nên ta loại trường hợp này.
- $t=-1$, ta có $M(0;3;2)$ nên phương trình $(\alpha):3x+9y-5z-17=0$.

3) Ta có $G\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra $A_1\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AG}=\left(-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AA_1}=\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AB'}\overrightarrow{AB'}+\frac{AC}{AC'}\overrightarrow{AC'}+\frac{AD}{AD'}\overrightarrow{AD'}\right)$$

Vì B',C',D',G đồng phẳng nên ta có:

$$\frac{1}{4}.\left(\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\right)=1\Rightarrow\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AB}{AB'}.\frac{AC}{AC'}.\frac{AD}{AD'}}\Rightarrow\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}.\frac{AD'}{AD}\ge\frac{27}{64}$$

Mặt khác: $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\ge\frac{27}{64}\Rightarrow V_{AB'C'D'}\ge\frac{27}{64}V_{ABCD}=\frac{45}{32}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{AD}{AD'}=\frac{3}{4}$

Do đó: $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow(\alpha)$ song song với mặt phẳng (BCD).

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(3;-1;2),\overrightarrow{BD}=(-1;2;5)\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=(-9;-17;5)$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $9x+17y-5z-6=0$.

🕮 BÀI TẬP

Bài 1.2.3. Viết phương trình mặt phẳng (α), biết:

1) (α) đi qua điểm $A(2;3;-1)$ và đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$,

2) (α) chứa hai đường thẳng d_1 và $d_2:\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$,

3) (α) chứa d_1 và song song với Oy.

Hướng dẫn giải

1) Đường thẳng d_1 đi qua $B(0;1;2)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;3)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{u_1}=(1;8;6)$

Phương trình $(\alpha):x+8y+6z-20=0$.

2) Đường thẳng d_2 đi qua $C(-1;2;0)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{BC}=(-1;1;-2)\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{BC}=(1;3;1)$

Phương trình $(\alpha):x+3y+z-5=0$.

3) Oy có VTCP $\vec{k}=(0;1;0)$. Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{u_1}\wedge\vec{k}=(-1;0;2)$

Phương trình $(\alpha):x-2z=0$.

Bài 2.2.3. Trong không gian Oxyz cho 4 điểm

$$A(1;1;1),\ B(-1;2;0),\ C(-2;0;-1), D(3;-1;2).$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (ABC). Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.

2) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua AB và song song với CD

3) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua AB và cách đều C, D

4) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua BC và cách A một khoảng lớn nhất.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;1;-1),\overrightarrow{AC}=(-3;1;2)\Rightarrow\overrightarrow{n_{ABC}}=(3;7;1)$

Phương trình $(ABC):3x+7y+z-11=0$

Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm tam giác ABC, ta có:

$$\begin{cases}H\in(ABC)\\\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+7b+c-11=0\\2a-b+c+5=0\\3a-b-2c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{72}{59}\\b=\frac{127}{59}\\c=\frac{-24}{59}\end{cases}.\ \text{Vậy } H\left(-\frac{72}{59};\frac{127}{59};-\frac{24}{59}\right).$$

2) Ta có $\overrightarrow{CD}=(5;-1;3)\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(2;1;-3)$

Phương trình $(\alpha):2x+y-3z=0$

3) Phương trình (β) có dạng:

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0 \text{ với } a^2+b^2+c^2\ne0$$

Do $B\in(\alpha)$ nên suy ra $-2a+b-c=0\Rightarrow c=-2a+b$

Nên ta viết lại phương trình (β) như sau: $ax+by+(-2a+b)z+a-2b=0$

Vì (α) cách đều C, D nên $d(C,(\alpha))=d(D,(\alpha))$

$\Leftrightarrow|a-3b|=|b|\Leftrightarrow a=4b, a=2b$

- $a=4b$, ta chọn $b=1\Rightarrow a=4$. Phương trình $(\beta):4x+y-7z+2=0$
- $a=2b$, ta chọn $b=1\Rightarrow a=2$. Phương trình $(\beta):2x+y-3z=0$.

4) Ta có phương trình BC: $\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=t\end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu của A lên BC, suy ra $K(-1+t;2+2t;t)$

$\overrightarrow{AK}=(t-2;2t+1;t-1)$.

Do $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow t=\frac{1}{6}\Rightarrow\overrightarrow{AK}=\left(-\frac{11}{6};\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P), ta có $AH=d(A,(P))$

Và $AH\le AK$ nên $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H\equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK

Phương trình $(P):11x-4y+5z+19=0$.

Bài 3.2.3. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$d_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-2},\ d_2:\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{4},\ d_3:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(1;2;3), B(-1;0;2)$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại C, D sao cho $CD=\sqrt{38}$.

2) Viết phương trình mặt phẳng (β) song song và cách đều hai đường thẳng d₁ và d₃.

3) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O và cắt d₂, d₃ lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $MN=\sqrt{14}$ đồng thời MN song song với mặt phẳng $(Q): 2x+y+z-1=0$ và $x_N<-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có đường thẳng d₁ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;-2)$, đường thẳng d₂ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;2)$ và đường thẳng d₃ có VTCP $\overrightarrow{u_3}=(1;1;1)$.

$C\in d_1 \Rightarrow C(2c;-c;1-2c),\ D\in d_2 \Rightarrow D(1-2d;-1+d;-2+2d)$

$\overrightarrow{CD}=(-2x+1;x-1;2x-3),\ x=d+c$

Suy ra $CD=\sqrt{38} \Leftrightarrow (2x-1)^2+(x-1)^2+(2x-3)^2=38$

$\Leftrightarrow 9x^2-18x-27=0 \Leftrightarrow x=-1, x=3$

- $x=-1 \Rightarrow \overrightarrow{CD}=(3;-2;-5)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)$

  Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(8;-13;10)$

  Phương trình $(\alpha): 8x-13y+10z-12=0$

- $x=3 \Rightarrow \overrightarrow{CD}=(-5;2;3)$. Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(-4;11;-14)$

  Phương trình $(\alpha): 4x-11y+14z-24=0$.

2) Vì (β) song song với hai đường thẳng d₁, d₃ nên ta có

$\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_3}=(1;-4;3)$

Phương trình (β) có dạng: $x-4y+3z+m=0$

Lấy $E(0;0;1)\in d_1$, $F(-1;0;-1)\in d_3$

Vì (β) cách đều hai đường thẳng d_1, d_3 nên ta có:

$d(E,(\beta))=d(F,(\beta)) \Leftrightarrow |m+3|=|m-4| \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Vậy phương trình $(\beta): x-4y+3z+\frac{1}{2}=0$.

3) Ta có $M(1-2m;-1+m;-2+2m)$, $N(-1+n;n;-1+n)$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(n+2m-2;n-m+1;n-2m+1)$

Do MN // (Q) nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_Q}=0$

$\Leftrightarrow 2(n+2m-2)+(n-m+1)+(n-2m+1)=0 \Leftrightarrow m=2-4n$

Mặt khác: $MN=\sqrt{14} \Leftrightarrow (n+2m-2)^2+(n-m+1)^2+(n-2m+1)^2=14$

$\Leftrightarrow 155n^2-92n=0 \Leftrightarrow n=0, n=\frac{92}{155}$.

Do $x_N<-\frac{1}{2}$ nên ta có $n=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow M(-3;1;2), N(-1;0;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}=(-1;-5;1)$

Phương trình $(P): x+5y-z=0$.

Bài 4.2.3. Lập phương trình mặt phẳng (α) biết

1) (α) qua hai điểm A(1; 2; −1), B(0; −3; 2) và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-y-z+1=0$.

2) (α) cách đều hai mặt phẳng

$(\beta): x+2y-2z+2=0,\ (\gamma): 2x+2y+z+3=0$.

3) (α) qua hai điểm $C(-1;0;2), D(1;-2;3)$ và khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) là 2.

4) (α) song song với mặt phẳng $(Q): x-2y-2z-3=0$ và khoảng cách giữa hai mặt phẳng là 3.

5) (α) đi qua E(0; 1; 1) và $d(A,(\alpha))=2; d(B,(\alpha))=\frac{11}{7}$, trong đó A(1; 2; −1), B(0; −3; 2).

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-5;3), \vec{n}_{(P)}(2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(8;5;11)$.

Mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên

$\vec{n}_{(\alpha)}\perp\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(P)} \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(8;5;11)$.

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm

$8(x-1)+5(y-2)+11(z+1)=0 \Leftrightarrow 8x+5y+11z-7=0$.

2) Gọi $M(x;y;z)$ là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (α).

Ta có $d(M,(\beta))=d(M,(\gamma)) \Leftrightarrow \frac{|x+2y-2z+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+2y+z+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow |x+2y-2z+2| = |2x+2y+z+3|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y-2z+2 = 2x+2y+z+3 \\ x+2y-2z+2 = -2x-2y-z-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3z+1=0 \\ 3x+4y-z+5=0 \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng (α) cần tìm là

$(\alpha): x+3z+1=0$ hoặc $(\alpha): 3x+4y-z+5=0$.

3) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $C(-1;0;2)$ nên có phương trình dạng

$A(x+1)+By+C(z-2)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$

Vì (α) qua $D(1;-2;3)$ nên $2A-2B+C=0 \Rightarrow C=2B-2A$ (1).

Ta có $d(O,(\alpha))=2$ nên $\dfrac{|A-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=2$ (2).

Thế (1) vào (2) rồi bình phương, rút gọn ta thu được

$5A^2-8AB-4B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=2B \\ A=-\dfrac{2}{5}B \end{array}\right.$. Do $A^2+B^2+C^2>0$ nên

- Nếu $A=2B$ thì chọn $B=1 \Rightarrow A=2, C=-2$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x+y-2z+6=0$.
- Nếu $A=-\dfrac{2}{5}B$ thì chọn $B=-5 \Rightarrow A=2, C=-14$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x-5y-14z+30=0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn $2x+y-2z+6=0$, $2x-5y-14z+30=0$.

4) (α) song song với mặt phẳng $(Q): x-2y-2z-3=0$ nên có phương trình $(\alpha): x-2y-2z+D=0$. Lấy điểm $N(3;0;0)\in(Q)$.

Ta có $d((\alpha),(Q))=d(N,(\alpha)) \Leftrightarrow \dfrac{|3+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

$$\Leftrightarrow |D+3|=9 \Leftrightarrow D=6; D=-12.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm $x-2y-2z+6=0$, $x-2y-2z-12=0$.

5) Mặt phẳng (α) qua $E(0;1;1)$ có phương trình dạng

$Ax+B(y-1)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$

Theo bài ra $d(A,(\alpha))=2; d(B,(\alpha))=\dfrac{11}{7}$ với $A(1;2;-1), B(0;-3;2)$ nên

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{|A+B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=2 \\ \dfrac{|-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{11}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |A+B-2C|=2\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ (1) \\ 11|A+B-2C|=14|-4B+C|\ \ (2) \end{array}\right.$$

Từ (2) ta có $\left[\begin{array}{l} 11(A+B-2C)=14(-4B+C) \\ 11(A+B-2C)=14(4B-C) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=\dfrac{-67B+36C}{11} \\ A=\dfrac{45B+8C}{11} \end{array}\right.$

- Với $A=\dfrac{-67B+36C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình:

$$\left(\frac{-56B+14C}{11}\right)^2=4\left[\left(\frac{-67B+36C}{11}\right)^2+B^2+C^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 3826B^2-4432BC+1368C^2=0\ (3)$$

Phương trình (3) chỉ có nghiệm $B=C=0$, khi đó $A=0$ (không thỏa mãn điều kiện $A^2+B^2+C^2>0$)

- Với $A=\dfrac{45B+8C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{56B-14C}{11}\right)^2=4\left[\left(\frac{45B+8C}{11}\right)^2+B^2+C^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 1362B^2+1112BC+136C^2=0 \Leftrightarrow B=-\frac{2}{3}C, B=-\frac{34}{227}C.$$

+) Với $B=-\dfrac{2}{3}C$ thì chọn $C=-3 \Rightarrow B=2, A=6$ phương trình mặt phẳng (α) là

$6x+2y-3z+1=0$.

+) Với $B=-\dfrac{34}{227}C$ thì chọn $C=227 \Rightarrow B=-34, A=26$ phương trình (α) là

$26x-34y+227z-193=0$.

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là:

$6x+2y-3z+1=0,\ 26x-34y+227z-193=0.$

Bài 5.2.3. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu

$(S): x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-28=0$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}; d_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{1}.$$

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với hai đường thẳng d₁; d₂.

2) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d₁ và tạo với d₂ một góc φ thỏa $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

3) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d₂ và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{2\sqrt{93}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;1)$, bán kính $R=\sqrt{42}$

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(-5;1;-13)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;2)$

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(-7;-1;8)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(3;-2;1)$

1) Vì mặt phẳng (P) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên ta có:

$$\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right]=(1;4;5)$$

Suy ra phương trình (P) có dạng: $x+4y+5z+m=0$

Mặt khác, (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=R$

$$\Leftrightarrow\frac{|m-5|}{\sqrt{42}}=\sqrt{42}\Leftrightarrow|m-5|=42\Leftrightarrow m=47, m=-37$$

Vậy phương trình (P) là: $x+4y+5z-37=0$ hoặc $x+4y+5z+47=0$.

2) Vì mặt phẳng (α) chứa d_1 nên phương trình (α) có dạng

$$a(x+5)+b(y-1)+c(z+13)=0\Leftrightarrow ax+by+cz+5a-b+13c=0$$

Với $a^2+b^2+c^2\neq0$ và $2a-3b+2c=0\Leftrightarrow b=\dfrac{2a+2c}{3}$

Ta có: $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos\varphi}=\dfrac{1}{\sqrt7}$, suy ra $\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt7}$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt7}\Leftrightarrow\frac{|3a-2b+c|}{\sqrt{14}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt7}$$

$$\Leftrightarrow\left|3a-2.\frac{2a+2c}{3}+c\right|=\sqrt{2\left[a^2+\left(\frac{2a+2c}{3}\right)^2+c^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow(5a-c)^2=2(13a^2+8ac+13c^2)\Leftrightarrow a^2+26ab+25c^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=-c, a=-25c.$$

- $a=-c$, chọn $c=-1, a=1, b=0$. Phương trình $(\alpha): x-z-8=0$
- $a=-25c$, chọn $c=-1, a=25, b=16$.

  Phương trình $(\alpha): 25x+16y-z+96=0$.

3) Vì (β) chứa d_2 nên phương trình có dạng: $ax+by+cz+7a+b-8c=0$

Với $a^2+b^2+c^2\neq0$ và $3a-2b+c=0\Rightarrow c=2b-3a$

Theo giả thiết bài toán, ta có: $d(I,(\beta))=\sqrt{42-\dfrac{124}{3}}=\dfrac{\sqrt6}{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{|9a-2b-7c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt6}{3}\Leftrightarrow3|30a-16b|=\sqrt{6(10a^2-12ab+5b^2)}$$

$$\Leftrightarrow3(15a-8b)^2=2(10a^2-12ab+5b^2)\Leftrightarrow1340a^2-1428ab+379b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{379}{670}b,\ a=\frac{1}{2}b.$$

- $a=\dfrac{1}{2}b$, chọn $b=2, a=1, c=1$.

  Phương trình mặt phẳng (β) là: $x+2y+z+1=0$.
- $a=\dfrac{379}{670}b$, chọn $b=670, a=379, c=203$.

  Phương trình (β) là: $379x+670y+203z+1699=0$.

Bài 6.2.3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $A(2;0;1)$, $B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=3$.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối A – 2011)

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm AB ta có: $E(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng trung trực (Q) của AB có phương trình:

$$x+y-z+2=0.$$

Vì $MA=MB$ nên suy ra $M\in(Q)\Rightarrow M\in(P)\cap(Q)$

Gọi $M(a;b;c)$ suy ra: $\begin{cases}2a-b-c+4=0\\a+b-c+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3+\dfrac{3}{2}a\\b=1+\dfrac{1}{2}a\end{cases}$

Mặt khác: $MA^2=9\Rightarrow(a-2)^2+\left(\dfrac{1}{2}a+1\right)^2+(\dfrac{3}{2}a+2)^2=9$.

Giải ra ta được $a = 0, a = -\frac{6}{7}$

hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là: $M(0;1;3)$, $M\left(-\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Bài 7.2.3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối A – 2011)

Hướng dẫn giải

Xét $B(a;b;c)$. Vì tam giác AOB đều nên ta có hệ:

$$\begin{cases} OA = OB \\ OA = AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=32 \\ (a-4)^2+(b-4)^2+c^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-4=0 \\ c^2=32-a^2-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-b \\ c^2=16-2b^2+8b \end{cases}$$

Mà $B\in(S)$ nên : $a^2+b^2+c^2-4a-4b-4c=0$

$$\Leftrightarrow (4-b)^2+b^2+16-2b^2+8b-4(4-b)-4b-4c=0$$

Hay $c=4 \Rightarrow b^2-4b=0 \Rightarrow b=0, b=4$. Do đó $B(4;0;4)$ hoặc $B(0;4;4)$.

- $B(0;4;4)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;16)$

  nên phương trình (OAB): $x-y+z=0$.

- $B(4;0;4)$ ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(16;-16;-16)$

  nên phương trình (OAB): $x-y-z=0$.

Bài 8.2.3. Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$.

Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI=4\sqrt{14}$.

Hướng dẫn giải

Ta có Δ cắt (P) tại $I(1;1;1)$.

Điểm $M(x;y;3-x-y)\in(P) \Rightarrow \overrightarrow{MI}=(1-x;1-y;x+y-2)$

Đường thẳng Δ có $\vec{a}=(1;-2;-1)$ là VTCP

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{MI}.\vec{a}=0 \\ MI^2=16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ (1-x)^2+(1-y)^2+(-2+x+y)^2=16.14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=5 \\ y=9 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-3;-7;13)$ và $M(5;9;-11)$.

Bài 9.2.3. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC=\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases}, t\in R$.

Thay x, y, z vào phương trình (P) ta được :

$1+2t-2t-t-2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow C(-1;-1;-1)$.

Điểm $M\in\Delta \Leftrightarrow M(1+2t;t;-2-t) \Rightarrow MC=\sqrt{6} \Leftrightarrow (2t+2)^2+(t+1)^2+(t+1)^2=6$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow M(1;0;-2) \Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ t=-2 \Rightarrow M(-3;-2;0) \Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

Cách 2: Đường thẳng Δ có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}=(1;-2;1)$ là VTPT

Gọi H là hình chiếu của M lên (P), suy ra $\cos\widehat{HMC}=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|$

nên ta có $d(M,(P))=MH=MC.\cos\widehat{HMC}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 10.2.3. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$ $C(0;0;c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABCD) bằng $\frac{1}{3}$.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối B – 2010).

Hướng dẫn giải

Phương trình $(ABC):\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Vì $(ABC)\perp(P)\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Leftrightarrow b=c\Rightarrow (ABC): bx+y+z-b=0$.

Mà $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{b^2+2}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}$ (do $b>0$).

Vậy $b=c=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 11.2.3. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối D – 2010)

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$ là VTPT, mp(Q) có $\overrightarrow{n_Q}=(1;-1;1)$ là VTPT.

Do $\begin{cases}(R)\perp(P)\\(R)\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow$ mp(R) có $\overrightarrow{n_R}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(1;0;-1)$ là VTPT

Suy ra $(R): x-z+m=0$

Ta có $d(O;(R))=2\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+0+1}}=2\Leftrightarrow m=\pm2\sqrt{2}$

Vậy $(R): x-z\pm2\sqrt{2}=0$.

Bài 12.2.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối B – 2009)

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng *(P)* thỏa mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) đi qua A, B song song với CD.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2),\overrightarrow{CD}=(-2;4;0)$, suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14)$ là VTPT của (P). Phương trình (P): $4x+2y+7z-15=0$.

Trường hợp 2: (P) đi qua A, B và cắt CD tại I, suy ra I là trung điểm của CD Do đó $I(1;1;1)\Rightarrow \overrightarrow{AI}=(0;-1;0)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(2;0;3)$.

Phương trình $(P): 2x+3z-5=0$.

Vậy $(P): 4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P): 2x+3z-5=0$.

Bài 13.2.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

(Trích đề thi ĐH khối A – 2008)

Hướng dẫn giải

- Đường thẳng d có $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$ là VTCP.

  Gọi H là hình chiếu của A lên d

  $\Rightarrow H(1+2t;t;2+2t)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(2t-1;t-5;2t-1)$

  Do $AH\perp d\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+t-5+2(2t-1)=0$

  $\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(3;1;4)$.

- Gọi H' là hình chiếu của A lên mp(P).

  Khi đó, ta có: $AH'\le AH\Rightarrow d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H=H'\Leftrightarrow (P)\perp AH$

  Suy ra $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ là VTPT của (P) và (P) đi qua H.

  Vậy phương trình (P): $x-4y+z-3=0$.

Bài 14.2.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;1;2)$ $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$.

1) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.

2) Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1),\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;-8)$ là một VTPT của mp(ABC). Phương trình mp(ABC): $x+2y-4z+6=0$.

Gọi H(a;b;c) là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow H\in(ABC)\Rightarrow a+2b-4c+6=0$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{CH}=(a;b-1;c-2),\ \overrightarrow{BH}=(a-2;b+2;c-1)$

Vì $\begin{cases}CH\perp AB\\BH\perp AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b-c+5=0\\2a+b+c-3=0\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=0;b=1;c=2$.

Vậy $H(0;1;2)$.

2) Giả sử $M(a;b;c)\in(P)\Rightarrow 2a+2b+c-3=0$ (3)

Do $\begin{cases}MA^2=MB^2\\ MB^2=MC^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2b-4c+5=-4a+4b-2c+9\\ -4a+4b-2c+9=4a-2c+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-3b-c=2\\ 2a-b=1\end{cases}$ (4).

Từ (3) và (4) ta tìm được: $a=2;b=3;c=-7$

Vậy $M(2;3;-7)$ là điểm cần tìm.

Bài 15.2.3. Tìm m,n để 3 mặt phẳng sau cùng đi qua một đường thẳng:

$(P): x+my+nz-2=0$, $(Q): x+y-3z+1=0$ và (R): $2x+3y+z-1=0$.

Khi đó hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng chung đó và tạo với (P) một góc φ sao cho $\cos\varphi=\dfrac{23}{\sqrt{679}}$.

Hướng dẫn giải

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x+y-3z+1=0\\ 2x+3y+z-1=0\end{cases}$

* Cho $z=1\Rightarrow x=6, y=-4\Rightarrow A(6;-4;1)\in(Q)\cap(R)$.

* Cho $z=0\Rightarrow x=-4, y=3\Rightarrow B(-4;3;0)\in(Q)\cap(R)$.

Ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng $\Leftrightarrow A,B\in(P)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-4m+n=-4\\ 3m=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=4\end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Ta có: $\vec{n}=(1;2;4)$ là VTPT của (P)

Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x-6)+b(y+4)+c(z-1)=0$

Do $B\in(\alpha)$ nên ta có: $c=-10a+7b$. Suy ra $\vec{v}=(a;b;-10a+7b)$ là VTPT của (α)

Nên theo giả thiết ta có: $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{|-39a+30b|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}}$

Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{23}{\sqrt{679}}\Leftrightarrow\dfrac{|-39a+30b|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}}=\dfrac{23}{\sqrt{679}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{97}\,|39a-30b|=23\sqrt{3\left(101a^2+50b^2-140ab\right)}$

$\Leftrightarrow 3.97\left(13a-10b\right)^2=23^2\left(101a^2-140ab+50b^2\right)$

$\Leftrightarrow 85a^2+32ab-53b^2=0\Leftrightarrow a=-b, a=\dfrac{53}{85}b$

- $a=-b$ ta chọn $b=-1\Rightarrow a=1, c=-17$.

Phương trình $(\alpha): x-y-17z+7=0$

- $a=\dfrac{53}{85}b$ ta chọn $b=85\Rightarrow a=53, c=65$.

Phương trình $(\alpha): 53x+85y+65z-43=0$.

Bài 16.2.3. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho

1) M là trực tâm của tam giác ABC
2) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là lớn nhất.
3) $OA=OB=OC$
4) $8OA=12OB+16=37OC$ và $x_A>0, z_C<0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1$ (1).

1) Ta có: $\overrightarrow{AM}(1-a;9;4), \overrightarrow{BC}(0;-b;c), \overrightarrow{BM}(1;9-b;4), \overrightarrow{CA}(a;0;-c)$.

Điểm M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\begin{cases}M\in(\alpha)\\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1\\ 9b=4c\\ a=4c\end{cases}\Rightarrow a=98; b=\dfrac{98}{9}; c=\dfrac{49}{2}$.

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0$.

2) *Cách 1:* Ta có: $d(O,(\alpha))=\dfrac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$.

Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ với các số thực $a,b,c\neq0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1$ (1).

Áp dụng bđt Bunhiacopski ta có:

$$\left(1.\frac{1}{a}+9.\frac{1}{b}+4.\frac{1}{c}\right)^2 \le (1^2+9^2+4^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Nên suy ra $T \ge \frac{1}{98}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 1:\frac{1}{a}=9:\frac{1}{b}=4:\frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=9b=4c=98.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α).

Vì mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định M nên

$d(O,(\alpha)) = OH \le OM = \sqrt{98}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M$, khi đó (α) là mặt phẳng đi qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}(1;9;4)$ nên phương trình (α) là

$$1.(x-1)+9(y-9)+4.(z-4)=0 \Leftrightarrow x+9y+4z-98=0.$$

3) Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra bốn trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $a=b=c$.

  Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=14$,

  nên phương trình (α) là: $x+y+z-14=0$.

- Trường hợp 2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=6$, nên phương trình (α) là $x+y-z-6=0$.

- Trường hợp 3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-4$, nên phương trình (α) là $x-y+z+4=0$.

- Trường hợp 4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-12$, nên phương trình (α) là $x-y-z+12=0$.

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là $x+y+z-14=0$, và các mặt phẳng

$$x+y-z-6=0,\ x-y+z+4=0,\ x-y-z+12=0.$$

4) Vì $x_A>0, z_C<0$ nên $a>0, c<0$, do đó

$$8OA = 12OB+16 = 37OC \Leftrightarrow 8a = 12|b|+16 = -37c.$$

- Nếu $b>0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{2a-4}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

  $$\frac{1}{a}+\frac{27}{2a-4}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+2a-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-7 \end{array}\right.$$

  Vì $a>2$ nên $a=5 \Rightarrow b=2; c=-\frac{40}{37}$, phương trình mặt phẳng cần tìm là

  $$(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$$

- Nếu $b<0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{4-2a}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

  $$\frac{1}{a}+\frac{27}{4-2a}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+29a-35=0 \Leftrightarrow a=\frac{-29\pm 3\sqrt{109}}{2}$$

  Vì $a>2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

  Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x+20y-37z-40=0$.

Bài 17.2.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d_m có phương trình

$$\frac{x-3m-1}{2m}=\frac{y-1}{1-m}=\frac{z-6m}{3m+1},\ m \notin \left\{0;1;-\frac{1}{3}\right\}$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng d_m luôn nằm trong một mặt phẳng (α) cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_m đi qua $A(3m+1;1;6m)$ và có VTCP $\vec{u}=(2m;1-m;1+3m)$

Xét mặt phẳng cố định $(\alpha): ax+by+cx+d=0$ chứa d_m.

Khi đó: $\begin{cases} A \in (\alpha) \\ n_\alpha.u=0 \end{cases}, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(3m+1)+b+c.6m+d=0 \\ a.2m+b(1-m)+c(1+3m)=0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3a+6c)m+a+b+d=0 \\ (2a-b+3c)m+b+c=0 \end{cases}, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+6c=0 \\ a+b+d=0 \\ 2a-b+3c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=-c \\ d=3c \end{cases}, \text{chọn } c=-1 \Rightarrow a=2, b=1, d=-3$$

Vậy d_m luôn nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z-3=0$.

Bài 18.2.3. Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD có

$$A(1;1;1),\ B(2;0;2),\ C(-1;-1;0), D(0;3;4)$$

Trên các cạnh AB, AC, AD lấy các điểm B', C', D' thỏa $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (B'C'D') biết tứ diện AB'C'D' có thể tích lớn nhất.

2) Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, CD cắt AC, BD lần lượt tại M và N thỏa $AM+BN=6$.

Hướng dẫn giải

1) Áp dụng bđt Cô si ta có:

$$4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\ge\frac{27}{64}$$

Suy ra $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}\ge\frac{27}{64}\Rightarrow V_{AB'C'D'}\ge\frac{27}{64}V_{ABCD}$

Do đó $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4}$

Hay mặt phẳng (B'C'D') / /(BCD).

$\overrightarrow{BC}=(-3;-1;-2), \overrightarrow{BD}=(-2;3;2)\Rightarrow \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}=(4;10;-11)$

$$\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_{B'}-1=\frac{3}{4}\\ y_{B'}-1=-\frac{3}{4}\\ z_{B'}-1=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (B'C'D') là: $4x+10y-11z+\frac{39}{4}=0$.

2) Từ giả thiết, áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{BD}\Rightarrow BM=2AN\Rightarrow AN=2$$

Suy ra $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N-1=-\frac{4}{3}\\ y_N-1=-\frac{4}{3}\\ z_N-1=-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow N(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

Mà $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=(-8;-3;5)$

Phương trình $(\alpha): 8x+3y-5z+\frac{16}{3}=0$.

---

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để lập phương trình đường thẳng Δ, ta cần tìm một điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ mà Δ đi qua và một VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}(a;b;c)$. Khi đó phương trình của Δ có dạng:

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt,\ t\in\mathbb{R}.\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

Khi tìm VTCP của Δ, chúng ta cần lưu ý:

- Nếu Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là VTCP của Δ.
- Nếu $\Delta\perp(P)$ thì $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}$.
- Nếu Δ / /d thì $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{u_d}$.
- Nếu hai véc tơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ có giá vuông góc với Δ thì véc tơ $\vec{u}=\vec{a}\wedge\vec{b}$ là một VTCP của Δ.
- Nếu $\Delta\subset(P)$ thì $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}$.
- Nếu Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) thì $\vec{u}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}$ là một VTCP của Δ. Trong đó $\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}$ lần lượt là VTPT của (α) và (β).

Khi chọn mặt phẳng chứa Δ, chúng ta cần lưu ý:

- Nếu Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d thì Δ nằm trong mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với d.
- Nếu Δ đi qua M và cắt đường thẳng d thì Δ nằm trong mặt phẳng (P) đi qua M và d.
- Nếu Δ đi qua M và song song với mặt phẳng (α) thì Δ nằm trong mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (α).

Ví dụ 1.3.3. Lập phương trình đường thẳng Δ biết:

1) Δ đi qua $A(1;2;1)$ và $B(-1;0;0)$

2) Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng: $(\alpha): x+y-z+3=0$ và $(\beta): 2x-y+5z-4=0$

3) Δ đi qua $M(1;0;-1)$ và vuông góc với hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x}{-5}=\frac{y+2}{8}=\frac{z-1}{3}\quad;\quad d_2:\begin{cases}x=t\\ y=-1-2t.\\ z=0\end{cases}$$

Lời giải

1) Vì Δ đi qua A và B nên Δ nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)$ là VTCP

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=2-2t\\z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

2) Để lập phương trình đường thẳng Δ ta có các cách sau

Cách 1: Ta có $M(-1;-1;1)$, $N(-5;6;4)$ là hai điểm chung của (α) và (β)

Suy ra $M,N\in\Delta\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-4;7;3)$ là một VTCP của Δ.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=-1-4t\\y=-1+7t\\z=1+3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Cách 2: Ta có có $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{n_\beta}=(2;-1;5)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Vì Δ là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{u}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(4;-7;-3)$ là VTPT của Δ.

Và điểm $M\in\Delta$ nên phương trình $\Delta:\begin{cases}x=-1+4t\\y=-1-7t\\z=1-3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Cách 3: Ta có $M(x;y;z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(\alpha)\\M\in(\beta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z+3=0\\2x-y+5z-4=0\end{cases}$

Đặt $z=t$ ta được: $\begin{cases}x+y=-3+t\\2x-y=4-5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\\y=-\frac{10}{3}+\frac{7}{3}t\end{cases}$

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\\y=-\frac{10}{3}+\frac{7}{3}t\\z=t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

3) Ta có: d₁ có $\overrightarrow{u_1}=(5;-8;-3)$ là VTCP; d₂ có $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;0)$ là VTCP

Cách 1: Giả sử $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của Δ.

Vì Δ vuông góc với d₁ và d₂ nên ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{u_1}=0\\\vec{u}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a-8b-3c=0\\a-2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b\\c=\frac{2}{3}b\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=\frac{b}{3}.(6;3;2)$$

Phương trình Δ là: $\begin{cases}x=1+6t\\y=3t\\z=-1+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Cách 2: Vì Δ vuông góc với hai đường thẳng d₁, d₂ nên véc tơ $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(-6;-3;-2)$ là VTPT của đường thẳng Δ.

Vậy phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1-6t\\y=-3t\\z=-1-2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 2.3.3. Lập phương trình đường thẳng Δ, biết

1) Δ nằm trong $(P): y+2z=0$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=4t\end{cases};\quad d_1:\begin{cases}x=2-t'\\y=4+2t'\\z=1\end{cases}.$$

2) Δ đi qua $M(-4;-5;3)$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}\text{ và }d_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$$

3) Δ đi qua $M(0;1;1)$, vuông góc với $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và cắt đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải.

1) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (P) với d₁, d₂

Thay phương trình d_1 vào phương trình (P) ta có :

$t+8t=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow A(1;0;0)$.

Thay phương trình d₂ vào phương trình (P) ta có :

$2t+6=0\Leftrightarrow t=-3\Rightarrow B(6;-2;1)$.

Vì Δ nằm trong (P) đồng thời Δ cắt d₁, d₂ nên Δ đi qua A, B

Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{AB}=(5;-2;1)$ làm VTCP.

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2t\\z=t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

2) Ta có d₁ đi qua $M_1(-1;-3;2)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(3;-2;-1)$ là VTCP

Đường thẳng d₂ đi qua $M_2(2;-1;1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(2;3;-5)$ là VTCP

Gọi (P) là mp đi qua M và chứa đường thẳng d₁.

Khi đó (P) có $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{MM_1}\wedge\overrightarrow{u_1}=(-4;0;-12)$ là VTPT

Tương tự gọi (Q) là mp đi qua M và đường thẳng d₂, suy ra $\overrightarrow{n_Q}=(7;-13;-5)$ là VTPT của (Q).

Vì Δ đi qua M và cắt hai đường thẳng d₁, d₂ nên Δ là giao tuyến của (P) và (Q)

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=-52(3;2;-1)$ là VTCP của Δ.

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=-4+3t\\ y=-5+2t\\ z=3-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

3) *Cách 1:* Đường thẳng d₂ đi qua $A(-1;0;1)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(0;1;1)$ là VTCP

Đường thẳng d₁ có $\overrightarrow{u_1}=(3;1;1)$ là VTCP

Gọi (P) là mp đi qua M vuông góc với đường thẳng d₁, suy ra $\overrightarrow{n_P}=(3;1;1)$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi (Q) là mp đi qua M và cắt đường thẳng d₂. Suy ra $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_2}\wedge\overrightarrow{MA}=(1;-1;1)$ là VTPT của mặt phẳng (Q).

Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=2(1;-1;-2)$ là VTCP của Δ.

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=1-2t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Gọi $N=\Delta\cap d_2\Rightarrow N(-1;t;t+1)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-1;t-1;t)$

Vì Δ vuông góc với $d_1\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-1;1;2)$

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=-t\\ y=1+t\\ z=1+2t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.3.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=1+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+y+2z-11=0$.

1) Lập phương trình hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α)

2) Viết phương trình đường thẳng Δ₁ nằm trong (α) đồng thời cắt và vuông góc với Δ.

3) Viết phương trình đường thẳng Δ_2 nằm trong mặt phẳng (α), cắt Δ và tạo với đường thẳng Δ một góc φ thỏa $\cos\varphi=\frac{7\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua M(1;2;1) có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;2)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;1;2)$.

1) *Cách 1:* Ta thấy hệ phương trình $\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=1+2t\\ 2x+y+2z-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

Suy ra $\Delta\cap(P)=I(2;1;3)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên (α), suy ra phương trình MH: $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=1+2t\end{cases}$

Suy ra $H(1+2t;2+t;1+2t)$.

Do $H\in(\alpha)$ nên ta có: $2(1+2t)+2+t+2(1+2t)-11=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{9}$

Hay $H\left(\frac{19}{9};\frac{23}{9};\frac{19}{9}\right)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(\frac{1}{9};\frac{14}{9};-\frac{8}{9}\right)$

Hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α) chính là IH

Phương trình IH: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{14}=\frac{z-3}{-8}$.

Cách 2. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (α)

Suy ra $n_\beta=n_\alpha\wedge u_\Delta=(4;-2;-3)$.

Gọi Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (α), ta có $\Delta'=(\alpha)\cap(\beta)$

Suy ra $\overrightarrow{u_{\Delta'}}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(1;14;-8)$ và $I\in\Delta'$ nên phương trình Δ' là:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{14}=\frac{z-3}{-8}.$$

2) Gọi $J=\Delta_1\cap\Delta\Rightarrow J=\Delta\cap(\alpha)\Rightarrow J\equiv I$

Vì $\begin{cases}\Delta_1\cap(\alpha)\\ \Delta_1\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_\Delta}=(4;-2;-3)$

Phương trình $\Delta_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-3}$.

3) Vì Δ_2 nằm trong mặt phẳng (α) và cắt Δ nên Δ_2 đi qua I.

Gọi $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=(a;b;c)$, ta có: $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\Leftrightarrow 2a+b+2c=0\Leftrightarrow b=-2a-2c$

Mặt khác : $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}.\overrightarrow{u_{\Delta}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right|.\left|\overrightarrow{u_{\Delta}}\right|} = \dfrac{|a-b+2c|}{\sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}} = \dfrac{|3a+4c|}{\sqrt{6(5a^2+8ac+5c^2)}}$

Do đó $\cos\varphi = \dfrac{7\sqrt{3}}{18} \Leftrightarrow \dfrac{|3a+4c|}{\sqrt{6(5a^2+8ac+5c^2)}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{18}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}|3a+4c| = 7\sqrt{5a^2+8ac+5c^2} \Leftrightarrow 18(3a+4c)^2 = 49(5a^2+8ac+5c^2)$

$\Leftrightarrow 83a^2 - 40ac - 43c^2 = 0 \Leftrightarrow a = c, a = -\dfrac{43}{83}c$

- $a = c \Rightarrow b = -4a$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -4, c = 1$

  Phương trình $\Delta_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$

- $a = -\dfrac{43}{83}c$, chọn $a = 43 \Rightarrow b = 80, c = -83$

  Phương trình $\Delta_2 : \dfrac{x-2}{43} = \dfrac{y-1}{80} = \dfrac{z-3}{-83}$.

Ví dụ 4.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2} \text{ và } d_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

1) Viết phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng d₁, d₂ lần lượt tại M,N thỏa $MN = 3\sqrt{3}$ và MN song song với $mp(\alpha) : x - 2y + 3z = 0$.

2) Viết phương trình đường thẳng d đi qua O và cắt d_2 tại A sao cho mặt cầu tâm A và đi qua O tiếp xúc với mặt phẳng $(\beta) : 5x + y - 4z - 16 = 0$.

Lời giải.

1) Vì $M \in d_1, N \in d_2$ nên suy ra $M(1+m;-1+2m;-2m)$, $N(3+2n;-3+n;2-n)$

Do đó $\overrightarrow{MN} = (2n-m+2;n-2m-2;-n+2m+2)$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} MN^2 = 27 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2n-m+2)^2 + 2(n-2m-2)^2 = 27 \\ 2n-m+2-2(n-2m-2)+3(-n+2m+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 3m+4 \\ (5m+10)^2 + 2(m+2)^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -3 \\ n = -5 \end{cases}$$

- $\begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$, suy ra $M(0;-3;2), \overrightarrow{MN} = (5;-2;1)$

  Phương trình $\Delta : \dfrac{x}{5} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$.

- $\begin{cases} m = -3 \\ n = -5 \end{cases}$, suy ra $M(-2;-7;6), \overrightarrow{MN} = (-5;-1;1)$

  Phương trình $\Delta : \dfrac{x+2}{-5} = \dfrac{y+7}{-1} = \dfrac{z-6}{1}$.

2) Ta có $A \in d_2$ nên $A(3+2a;-3+a;2-a)$

Vì mặt cầu tâm A đi qua O tiếp xúc với (β) nên ta có : $OA = d(A,(\beta))$

Mà $OA^2 = (3+2a)^2 + (a-3)^2 + (a-2)^2 = 6a^2 + 2a + 22$

$d(A,(\beta)) = \dfrac{|15a-12|}{\sqrt{42}}$ nên ta có :

$6a^2 + 2a + 22 = \dfrac{(15a-12)^2}{42} \Leftrightarrow 9a^2 + 148a + 260 = 0 \Leftrightarrow a = -2, a = -\dfrac{130}{9}$

- $a = -2$, suy ra $A(-1;-5;4) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{OA} = (-1;-5;4)$

  Phương trình $d : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{-4}$.

- $a = -\dfrac{130}{9}$, suy ra $A\left(-\dfrac{233}{9};-\dfrac{157}{9};\dfrac{148}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = -9\overrightarrow{OA} = (233;157;-148)$

  Phương trình $d : \dfrac{x}{233} = \dfrac{y}{157} = \dfrac{z}{-148}$.

Ví dụ 5.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2},\quad \Delta_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}.$$

1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua O, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2.

Lời giải.

1) Ta dễ dàng chứng minh được Δ_1, Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau.

Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Ta có $\Delta \cap \Delta_1 = A(2-a;\,-1+a;\,2a)$, $\Delta \cap \Delta_2 = B(3+2b;\,2-b;\,-1-b)$.

Do đó một véc tơ chỉ phương của Δ là: $\overrightarrow{AB}(1+2b+a;\,3-b-a;\,-1-b-2a)$.

Vì $\begin{cases} \Delta \perp \Delta_1 \\ \Delta \perp \Delta_2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_{\Delta_1}} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_{\Delta_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = 0 \end{cases}$, do đó

$$\begin{cases} -1-2b-a+3-b-a-2-2b-2a = 0 \\ 2+4b+2a-3+b+a+1+b+2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+5b = 0 \\ 5a+6b = 0 \end{cases}$$

Do đó $a=0, b=0$ nên $A(2;-1;0)$, $B(3;2;-1)$, $\overrightarrow{AB}(1;3;-1)$.

Phương trình đường vuông góc chung cần tìm là $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+3t \ (t\in R). \\ z=-t \end{cases}$

2) Gọi $M=\Delta\cap\Delta_1 \Rightarrow M(2-m;-1+m;2m) \Rightarrow \overrightarrow{OM}=(2-m;-1+m;2m)$

Vì $\Delta\perp\Delta_2$ nên $\overrightarrow{MO}.\vec{u}_{\Delta_2}=0 \Leftrightarrow 2(2-m)-(-1+m)-2m=0 \Leftrightarrow m=1$

Suy ra $\vec{u}_\Delta=\overrightarrow{OM}=(1;0;2)$.

Phương trình $\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=0 \ ,t\in\mathbb{R}. \\ z=2t \end{cases}$

Ví dụ 6.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{1} \quad ; \quad d_2:\frac{x+5}{6}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$$

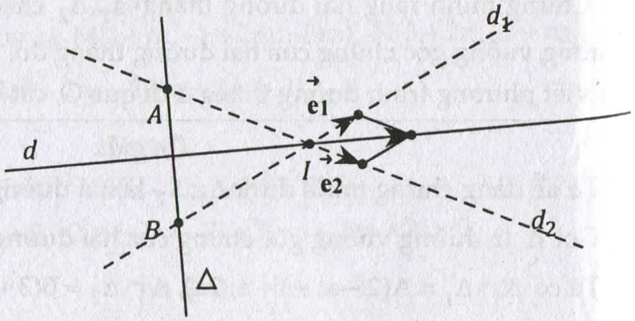
1) Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại I. Viết phương trình đường thẳng Δ tạo với hai đường thẳng d₁, d₂ một tam giác cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

2) Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lời giải.

1) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{1} \\ \frac{x+5}{6}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$



Vậy d_1 cắt d_2 tại giao điểm $I(1;1;2)$.

d_1 đi qua điểm $M_1(3;3;3)$ có $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$ là VTCP;

d_2 đi qua $M_2(-5;-2;0)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(6;3;2)$ là VTCP.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2

Ta có : $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{20}{21} \Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{\sqrt{41}}{21}$

Giả sử $IA=IB=a>0$. Diện tích của tam giác IAB là :

$$S=\frac{1}{2}.IA.IB.\sin\varphi=a^2\frac{\sqrt{41}}{42}=\frac{\sqrt{41}}{42} \Rightarrow a=1.$$

Ta có: $A\in d_1 \Rightarrow A(3+2t;3+2t;3+t) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(2t+2;2t+2;t+1)$

Nên $IA^2=1 \Leftrightarrow 9(t+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{3} \\ t=-\frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow A_1(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}),\ A_2(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3})$.

$B\in d_2 \Rightarrow B(-5+6t;-2+3t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IB}=(6t-6;3t-3;2t-2)$

Do đó: $IB^2=1 \Leftrightarrow 49(t-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{7} \\ t=\frac{6}{7} \end{array}\right.$.

Suy ra $B_1\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right)$, $B_2\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Vậy ta có 4 trường hợp là:

- $A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right);B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\frac{4}{21};-\frac{5}{21};-\frac{1}{21}\right)$

Phương trình $\Delta:\frac{x-\frac{5}{3}}{4}=\frac{y-\frac{5}{3}}{-5}=\frac{z-\frac{7}{3}}{-1}$

- $A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right);B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\frac{32}{21};-\frac{23}{21};-\frac{13}{21}\right)$

Phương trình $\Delta:\frac{x-\frac{5}{3}}{32}=\frac{y-\frac{5}{3}}{23}=\frac{z-\frac{7}{3}}{13}$.

- $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right);B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\frac{32}{21};\frac{23}{21};\frac{13}{21}\right)$

Phương trình $\Delta:\frac{x-\frac{1}{3}}{32}=\frac{y-\frac{1}{3}}{23}=\frac{z-\frac{5}{3}}{13}$.

- $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right);B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\frac{4}{21};\frac{5}{21};\frac{1}{21}\right)$

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-\frac{1}{3}}{4} = \dfrac{y-\frac{1}{3}}{-5} = \dfrac{z-\frac{5}{3}}{-1}$.

2) Gọi d là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2

Ta có $I \in d$. Đặt $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\overrightarrow{u_1} = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\overrightarrow{u_2} = \left(\dfrac{6}{7}; \dfrac{3}{7}; \dfrac{2}{7}\right)$

Khi đó $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ là các véc tơ đơn vị trên d_1, d_2. Suy ra $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} \pm \overrightarrow{e_2}$

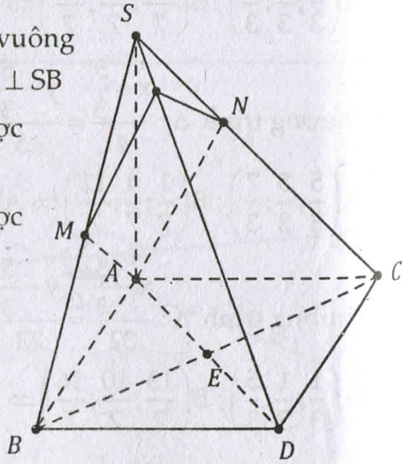
- $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \left(\dfrac{32}{21}; \dfrac{23}{21}; \dfrac{13}{21}\right)$, suy ra phương trình d là: $\dfrac{x-1}{32} = \dfrac{y-1}{23} = \dfrac{z-2}{13}$.
- $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \left(-\dfrac{4}{21}; \dfrac{5}{21}; \dfrac{1}{21}\right)$, suy ra phương trình d là: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{1}$.

Ví dụ 7.3.3. Trong không gian Oxyz cho hình chóp S.ABC có $S(2;1;2)$, $A(3;0;-1)$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC lần lượt là hai điểm M, N và mặt phẳng (AMN) có phương trình $2y + 3z + 3 = 0$. Gọi D là điểm đối xứng với A qua trung điểm E của BC.

1) Viết phương trình đường thẳng SD.

2) Viết phương trình đường thẳng BC.

Lời giải.



1) Từ giải thiết ta suy ra được ABCD là hình vuông

Ta có: $BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AM$, lại có $AM \perp SB$ nên suy ra $AM \perp (SBD)$ hay ta suy ra được $AM \perp AD$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SD$

Suy ra $SD \perp (AMN)$.

Vậy phương trình SD: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

2) Ta có $\overrightarrow{SA} = (1;-1;-3)$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$x - y - 3z - 6 = 0$.

Vì $D = SD \cap (ABC)$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \\ x - y - 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow D(2;-1;-1)$$

Suy ra trung điểm của BC là: $E\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{1}{2}; -1\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}; 0)$

Phương trình BC: $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} + t \\ y = -\dfrac{1}{2} + t \\ z = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 8.3.3. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-5}; \ d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng Δ cắt d₁ và d₂ tương ứng ở A và B, đồng thời khoảng cách từ Δ đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{6}$. Viết phương trình Δ, biết điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Ta có $A \in d_1$ nên $A(3+a; 1+2a; -5a)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(2+3b; 1-b; 3+2b)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (3b - a - 1; -b - 2a; 2b + 5a + 3)$

Do Δ cách (α) một khoảng bằng $\sqrt{6}$ nên ta có $\begin{cases} AB // (\alpha) \\ d(A, (\alpha)) = \sqrt{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0 \\ d(A,(\alpha)) = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3b - a - 1) + (-b - 2a) + (2b + 5a + 3) = 0 \\ \dfrac{|a|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \text{ (do } x_A > 0) \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow A(9;13;-30), \ \overrightarrow{AB} = (-10;-11;31)$$

Phương trình $\Delta: \dfrac{x-9}{10} = \dfrac{y-13}{11} = \dfrac{z+30}{-31}$.

Ví dụ 9.3.3. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 3 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = 2 + 2k \end{cases}.$$

1) Hai điểm M, N di động trên d_1 sao cho MN = 4. Tìm trên đường thẳng d_2 điểm P sao cho tam giác MPN có diện tích bằng 2.

2) Tìm $A,B \in d_1$ và $C,D \in d_2$ sao cho ABCD là tứ diện đều.

Lời giải

1) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;2;3)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(-2;1;-2)$

d_2 đi qua $M_2(3;1;2)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-1;2;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2}=(2;-1;-1)$, $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(6;6;-3)$

Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2}.(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2})=9\neq 0$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau

và $d(d_1,d_2)=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2})\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right|}=1$.

Gọi H là hình chiếu của P lên MN, ta có: $S_{\Delta MNP}=\dfrac{1}{2}PH.MN$

Mà $MN=4, S_{\Delta MNP}=2\Rightarrow PH=1=d(d_1,d_2)$

Từ đó ta suy ra được PH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Vì $P\in d_2$ nên $P(3-k;1+2k;2+2k), H\in d_1$ nên $H(1-2t;2+t;3-2t)$

Suy ra $\overrightarrow{PH}=(-2t+k-2;t-2k+1;-2t-2k+1)$

Do $\begin{cases}PH\perp d_1\\PH\perp d_2\end{cases}$ nên ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{PH}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2(-2t+k-2)+t-2k+1-2(-2t-2k+1)=0\\-(-2t+k-2)+2(t-2k+1)+2(-2t-2k+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9t+3=0\\-9k+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{3}\\k=\dfrac{2}{3}\end{cases}.\text{ Vậy } P(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}).$$

2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta chứng minh được MN là đường vuông góc chung của d_1 và d_2

Suy ra $M\equiv H, N\equiv P$ nên $N\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$, $M\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$ và $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Gọi a là độ dài các cạnh của tứ diện ABCD, ta có:

$$AN=\frac{a\sqrt{3}}{2}, AM=\frac{a}{2}\Rightarrow MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

$$A\in d_1\Rightarrow A(1-2t;2+t;3-2t)\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\left(-2t-\frac{2}{3};t+\frac{1}{3};-2t-\frac{2}{3}\right)$$

Suy ra $MA^2=9\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{6}$.

$A\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{3};\dfrac{10+\sqrt{2}}{6};\dfrac{11-\sqrt{2}}{3}\right)$ và $B\left(\dfrac{5+\sqrt{2}}{3};\dfrac{10-\sqrt{2}}{6};\dfrac{11+\sqrt{2}}{3}\right)$

Tương tự: $C(3-k;1+2k;2+2k)$ và $CN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên ta có:

$$9\left(k-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{4\pm\sqrt{2}}{6}$$

Suy ra $C\left(\dfrac{14-\sqrt{2}}{6};\dfrac{7+\sqrt{2}}{3};\dfrac{10+\sqrt{2}}{3}\right)$ và $D\left(\dfrac{14+\sqrt{2}}{6};\dfrac{7-\sqrt{2}}{3};\dfrac{10-\sqrt{2}}{3}\right)$.

Thử lại ta thấy $AB=AC=AD=BC=BD=CD=\sqrt{2}$

Hay tứ diện ABCD là tứ diện đều.

Vậy $A\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{3};\dfrac{10+\sqrt{2}}{6};\dfrac{11-\sqrt{2}}{3}\right)$; $B\left(\dfrac{5+\sqrt{2}}{3};\dfrac{10-\sqrt{2}}{6};\dfrac{11+\sqrt{2}}{3}\right)$;

$C\left(\dfrac{14-\sqrt{2}}{6};\dfrac{7+\sqrt{2}}{3};\dfrac{10+\sqrt{2}}{3}\right)$ và $D\left(\dfrac{14+\sqrt{2}}{6};\dfrac{7-\sqrt{2}}{3};\dfrac{10-\sqrt{2}}{3}\right)$.

Trong đó A, B và C, D có thể hoán vị cho nhau.

🕮 BÀI TẬP

Bài 1.3.3. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết

1) Δ đi qua hai điểm $A(1;2;1), B(3;-2;-1)$

2) Δ đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y-z=0$

3) Δ đi qua A và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$

4) Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha_1): x+y+z-3=0$ và $(\alpha_2): 3x-2y+z-2=0$.

5) Δ đi qua B, vuông góc với Ox và đường thẳng d (ở ý 3).

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-4;-2)$, phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

2) Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-3;-1)$, phương trình $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}$.

3) Ta có $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{u_d}=(1;2;-3)$, phương trình $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$

4) Ta có: $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_{\alpha_1}}\wedge\overrightarrow{n_{\alpha_2}}=(3;2;-5)$. Ta thấy $M(1;1;1)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$

Phương trình $\Delta:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}$.

5) Trên Ox có véc tơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$

Vì Δ cùng vuông góc với Ox và d nên $\overrightarrow{u_\Delta}=\vec{i}\wedge\overrightarrow{u_d}=(0;3;2)$

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=3\\y=-2+3t,\ t\in\mathbb{R}.\\z=-1+2t\end{cases}$

Bài 2.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}\ \text{và}\ \Delta_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z-1}{4}$$

1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(2;-10;-3)$ và cắt hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

3) Viết phương trình đường thẳng Δ' đi qua $B(3;0;5)$, cắt Δ_1 và vuông góc với Δ_2.

4) Viết phương trình đường thẳng d cắt Δ_1,Δ_2 lần lượt tại E, F thỏa $EF=4\sqrt{2}$ và d song song với mặt phẳng $(\alpha):x-y+z+1=0$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(1;1;0)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;1)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(2;-6;1)$, VTCP $\overrightarrow{u_2}=(2;-3;4)$

Suy ra $\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(-1;-2;-1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;-7;1)$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}\right).\overrightarrow{M_1M_2}=12\neq0$, do đó hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2

$M\in\Delta_1\Rightarrow M(1+m;1-m;m)$, $N\in\Delta_2\Rightarrow N(2+2n;-6-3n;1+4n)$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(2n-m+1;-3n+m-7;4n-m+1)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2n-m+1+3n-m+7+4n-m+1=0\\2(2n-m+1)+3(3n-m+7)+4(4n-m+1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3n-m+3=0\\29n-9m+27=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0\\m=3\end{cases}$

Suy ra $N(2;-6;1)$, $\overrightarrow{MN}=(-2;-4;-2)$.

Phương trình $MN:\frac{x-2}{1}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{1}$.

2) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và Δ_1. Ta có: $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AM_1}\wedge\overrightarrow{u_1}=(14;4;-10)$

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và Δ_2. Ta có: $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{AM_2}\wedge\overrightarrow{u_2}=(28;8;-8)$

Từ giả thiết ta suy ra được Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{n_Q}=(48;-168;0)$.

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-7t\\z=-3\end{cases}$.

3) Gọi $C=\Delta'\cap\Delta_1\Rightarrow C(1+t;1-t;t)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(t-2;-t+1;t-5)$

Vì $\Delta'\perp\Delta_2$ nên ta suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow2(t-2)-3(-t+1)+4(t-5)=0$

$\Leftrightarrow9t-27=0\Leftrightarrow t=3\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(1;-2;-2)$.

Phương trình $\Delta':\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-5}{-2}$.

4) Ta có $E\in\Delta_1\Rightarrow E(1+m;1-m;m)$, $F\in\Delta_2\Rightarrow F(2+2n;-6-3n;1+4n)$

Suy ra $\overrightarrow{EF}=(2n-m+1;-3n+m-7;4n-m+1)$

Ta có: $\begin{cases}EF^2=32\\\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{n_\alpha}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2n-m+1)^2+(3n-m+7)^2+(4n-m+1)^2=32\\(2n-m+1)+(3n-m+7)+(4n-m+1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3n+3=m\\(n-2)^2+16+(n+2)^2=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=2\\m=9\end{cases}\vee\begin{cases}n=-2\\m=-3\end{cases}$.

- $\begin{cases}n=2\\m=9\end{cases}$, ta có: $F(6;-12;9),\overrightarrow{EF}=(-4;-4;0)$

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=6+t\\y=-12+t\\z=9\end{cases}$.

- $\begin{cases}n=-2\\m=-3\end{cases}$, ta có: $F(-2;0;-7),\overrightarrow{EF}=(0;-4;-4)$

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2 \\ y=t \\ z=-7+t \end{cases}$.

Bài 3.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1},\ d_2: \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

Và mặt phẳng $(P): 2x+3y-2z+4=0$.

1) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

2) Viết phương trình đường thẳng Δ' nằm trong (P), cắt d_1 và vuông góc với d_2

3) Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P), cắt d_2 và tạo với d_1 một góc φ thỏa $\cos\varphi=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

1) Giả sử Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B.

Suy ra $A(1-a;a;-a),\ B(-1+2b;-1-b;1+2b)$

Vì $\Delta \subset (P)$ nên ta có $A, B \in (P)$.

Do đó: $\begin{cases} 2(1-a)+3a-2(-a)+4=0 \\ 2(-1+2b)+3(-1-b)-2(1+2b)+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$

Suy ra $A(3;-2;2),\ \overrightarrow{AB}=(-6;2;-3)$.

Phương trình $\Delta: \frac{x-3}{-6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-3}$.

2) Ta có Δ' đi qua $A(3;-2;2)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{u_{d_2}}=(4;-8;-8)$

Phương trình $\Delta': \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{-2}$.

3) Ta có d đi qua $B(-3;0;-1)$. Gọi $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c),\ a^2+b^2+c^2>0$.

Ta có: $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow 2a+3b-2c=0 \Rightarrow b=\frac{2}{3}(c-a)$ (1)

Mặt khác: $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}=\frac{|a-b+c|}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \frac{|5a+c|}{\sqrt{13a^2-8ac+13c^2}}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 9(5a+c)^2=13a^2-8ac+13c^2$

$\Leftrightarrow 212a^2+98ac-4c^2=0 \Leftrightarrow a=\frac{2}{53}c,\ a=-\frac{1}{2}c$.

- $a=\frac{2}{53}c$, chọn $c=53,\ a=2,\ b=34$. Phương trình $d: \frac{x+3}{2}=\frac{y}{34}=\frac{z+1}{53}$
- $a=-\frac{1}{2}c$, chọn $c=-2,\ a=1,\ b=-2$. Phương trình $d: \frac{x+3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2}$

Bài 4.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

(Trích câu 6a đề thi ĐH Khối D – 2011)

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với Ox

Suy ra $M(m;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(m-1;-2;-3)$, đường thẳng Δ có $\vec{a}=(2;1;-2)$ là VTCP.

Vì $AM \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{a} \Leftrightarrow m=-1 \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-2;-2;-3)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

Bài 5.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

(Trích câu 6b đề thi ĐH Khối D – 2009)

Hướng dẫn giải

Tọa độ điểm I của Δ với (P) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} \frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1} \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;1;1)$.

Ta có $\vec{n}=(1;2;-3)$ là VTPT của (P); $\vec{u}=(1;1;-1)$ là VTCP của Δ.

Đường thẳng d cần tìm qua I và có $\vec{v}=\left[\vec{n},\vec{u}\right]=(1;-2;-1)$ là VTCP.

Phương trình $d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$.

Bài 6.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2};\ d_2: \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2.

Tìm tọa độ các điểm $M\in d_1, N\in d_2$ sao cho MN song song với mặt phẳng $(P): x-y+z=0$ và độ dài $MN=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

d_1 đi qua $O(0;0;0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(1;1;2)$, d_2 đi qua $A(-1;0;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;1)$. Vì $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{OB}=4\neq 0\Rightarrow d_1,d_2$ chéo nhau.

$M\in d_1\Rightarrow M(t;t;2t), N\in d_2\Rightarrow N(-1-2s;s;1+s)$

Ta có: $\begin{cases}MN//(P)\\ MN=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}=0\\ MN=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-s\\ \sqrt{(t-s)^2+4t^2+(1-3t)^2}=\sqrt{2}\end{cases}$

Giải hệ và kiểm tra điều kiện song song ta được :

$M\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{8}{7}\right), N\left(\frac{1}{7};-\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$ thỏa mãn.

Bài 7.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;-1;2)$, đường cao BH và trung tuyến CM lần lượt nằm trên hai đường thẳng: $d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{4}$; $d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{1}$

Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB, AC của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Phương trình tham số của các đường thẳng (d_1) và (d_2) là :

$$(d_1):\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+3t\\ z=4+4t\end{cases},\ (d_2):\begin{cases}x=1+2s\\ y=-2-3t\\ z=5+s\end{cases}(t,s\in\mathbb{R}).$$

Vì $B\in(d_1)\Rightarrow B(2t-1;3t+1;4t+4)$, $C\in(d_2)\Rightarrow C(2s+1;-3s-2;s+5)$

Ta có $\overrightarrow{AC}=(2s+2;-3s-1;s+3)$

Tọa độ trung điểm M của AB là $M\left(t-1;\frac{3t-2}{2};2t+3\right)$.

VTCP của $(d_1):\overrightarrow{u_{BH}}=(2;3;4)$

vì $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_{BH}}=0\Rightarrow 2(2s+2)+3(-3s-1)+4(s+3)=0$

$\Leftrightarrow -s+13=0\Leftrightarrow s=13\Rightarrow C(27;-41;18)$.

Vì $M\in(d_2)\Rightarrow\begin{cases}t-1=2s+1\\ 3t-2=2(-3s-2)\\ 2t+3=s+5\end{cases}\Rightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow B\left(\frac{1}{3};3;\frac{20}{3}\right)$

Do đó phương trình $AB:\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{9}=\frac{z-2}{7}$, $AC:\frac{x+1}{13}=\frac{y+3}{-19}=\frac{z-2}{8}$.

Bài 8.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+z-1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-2+2t\\ z=-t\end{cases}$. Gọi $A=d\cap(P)$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, nằm trong (P) sao cho góc tạo bởi Δ và d bằng 45^0.

Hướng dẫn giải

Ta có $A(1;0;-1)$, VTCP của $(d):\vec{u}=(1;2;-1)$, VTPT của $(P):\vec{n}=(2;1;1)$

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)\ (a^2+b^2+c^2>0)$ là VTCP của (Δ)

Vì $(\Delta)\subset mp(P)\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\vec{n}=0\Rightarrow 2a+b+c=0\ (1)$

Góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^0 suy ra

$$\cos 45^0=\frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{6}}\Leftrightarrow|a+2b-c|=\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\,(2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra

$$3|a+b|=\sqrt{3\left(a^2+b^2+(2a+b)^2\right)}\Leftrightarrow 3a^2+6ab+3b^2=5a^2+4ab+2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-2ab-b^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}a\right)^2=(a+b)^2\Leftrightarrow b=-a\pm\sqrt{3}a$$

- Với $b=-a+a\sqrt{3}$, chọn $a=1\Rightarrow b=\sqrt{3}-1\Rightarrow c=-1-\sqrt{3}$
- Với $b=-a-a\sqrt{3}$, chọn $a=1\Rightarrow b=-\sqrt{3}-1\Rightarrow c=\sqrt{3}-1$

Từ đó ta có hai đường thẳng thỏa mãn có phương trình là :

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{\sqrt{3}-1}=\frac{z+1}{-\sqrt{3}-1}\text{ và }\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1-\sqrt{3}}=\frac{z+1}{\sqrt{3}-1}.$$

Bài 9.3.3. Cho $A(1;2;-1)$, $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với (P).

Hướng dẫn giải

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và $(Q)//(P)$

Suy ra phương trình $(Q): 2x+y-z-5=0$.

Gọi $B=(d)\cap(Q)$ thì tọa độ của B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}\\ 2x+y-z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ y=-1\\ z=-\dfrac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow B\left(\dfrac{5}{3};-1;-\dfrac{8}{3}\right)$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{3};-3;-\dfrac{5}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB.

Vậy phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-9}=\dfrac{z+1}{-5}$.

Bài 10.3.3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{x-3}{1}$; $d_2:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2.

Hướng dẫn giải

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $A(1;2;3)$ và vuông góc với d_1 có phương trình $2(x-1)-(y-2)+(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-y+z-3=0$

Vì Δ đi qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 nên Δ đi qua giao điểm B của d_2 và (α).

Tọa độ giao điểm B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\Rightarrow B(2;-1;-2)\\ z=-2\end{cases}$$

Véc tơ chỉ phương của $\Delta:\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;-3;-5)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$.

Bài 11.3.3. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và hai điểm $A(1;2;4), B(-1;2;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases}x=4-t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$

Tọa độ giao điểm M của đường thẳng AB với mp(P) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x=4-t\\ y=t\\ z=0\\ 3x+2y-z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-12\\ x=16\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow M(-12;16;0)$.

Điểm $I(2;2;0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Phương trình đường thẳng d đi qua I vuông góc với mp(P) : $\begin{cases}x=2+3t\\ y=2+2t\\ z=-t\end{cases}$.

Điểm $K(2+3t;2+2t;-t)\in d$ .Ta có $OK=d(K,(P))$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(2+3t)^2+(2+2t)^2+t^2}=\frac{|3(2+3t)+2(2+2t)+t+4|}{\sqrt{3^2+2^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 14\left(14t^2+20t+8\right)=14^2\left(t^2+2t+1\right)\Leftrightarrow 8t+6=0\Leftrightarrow t=-\frac{3}{4}$$

Vậy $K\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

Bài 12.3.3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}, d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. Chứng minh d_1,d_2 chéo nhau, viết phương trình đường thẳng Δ song song với Ox đồng thời cắt cả d_1,d_2.

Hướng dẫn giải

- * Ta có d_1 đi qua $M(0;3;-1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;3)$, d_2 đi qua $N(4;0;3)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;1;2)$, $\overrightarrow{MN}=(4;-3;4)$.

  $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{MN}=-23\neq 0$ nên d_1,d_2 chéo nhau.

- * Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với d_1,d_2.

  $A\in d_1\Rightarrow A(-t;3+2t;-1+3t), B\in d_2\Rightarrow B(4+s;s;3+2s), t,s\in\mathbb{R}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(s+t+4;s-2t-3;2s-3t+4)$

Ta có $\Delta//Ox$ nên

$$\begin{cases}s-2t-3=0\\ 2s-3t+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=-17\\ t=-10\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-23;0;0), A(10;-17;-31).$$

Phương trình $\Delta:\begin{cases}x=10+t\\ y=-17\\ z=-31\end{cases}$.

Bài 13.3.3. Trong hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Tìm giao điểm M của (d) và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) vuông góc với (d) sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

Hướng dẫn giải

Giao điểm M của d, mp(P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} \\ x+y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(1;-3;0).$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d vuông góc với mp(P). Theo giả thiết ta có $\Delta = (P) \cap (Q)$, với (Q) là mặt phẳng vuông góc với $mp(\alpha), mp(P)$ và khoảng cách từ M đến (Q) bằng $\sqrt{42}$.

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2;1;-1); \overrightarrow{n_p} = (1;1;1)$ lần lượt là các véc tơ chỉ phương, pháp tuyến của d, mp(P).

Véc tơ pháp tuyến của $mp(\alpha): \overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_p}] = (2;-3;1)$.

Véc tơ pháp tuyến của $mp(Q): \overrightarrow{n_q} = [\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_p}] = (4;1;-5)$

Phương trình $mp(Q): 4x+y-5z+a=0$

Theo giả thiết ta có: $d(M,(Q)) = \sqrt{42} \Leftrightarrow \frac{|4.1-1.3+a|}{\sqrt{4^2+1+5^2}} = \sqrt{42}$

$$\Leftrightarrow |1+a| = 42 \Leftrightarrow a = 41; a = -43.$$

* Với $a = 41 \Rightarrow (Q): 4x+y-5z+41=0$

Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-13+2t \\ y=11-3t \\ z=t \end{cases}$.

* Với $a=-43 \Rightarrow (Q): 4x+y-5z-43=0$

Phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=15+2t \\ y=-17-3t \\ z=t \end{cases}$.

Bài 14.3.3. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } \Delta_2: \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{-1}.$$

1) Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2) Cho A, B là hai điểm di động trên Δ_1 thỏa AB = 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua O và cắt Δ_2 tại C sao cho tam giác ABC có diện tích nhỏ nhất.

3) Có tồn tại hay không một tứ diện đều có hai đỉnh thuộc Δ_1 và hai đỉnh thuộc Δ_2. Nếu có hãy tìm tọa độ các đỉnh đó.

4) Viết phương trình đường thẳng d đi qua $P(1;4;5)$ và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt tại K, H sao cho PH = 2PK.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(0;1;0)$, VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;1)$

Δ_2 đi qua $M_2(-3;-5;4)$, VTCP $\overrightarrow{u_1} = (3;-1;-1)$

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3;-6;4)$, $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (2;4;2) \Rightarrow (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{M_1M_2} = -26 \neq 0$

Suy ra hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 với $M \in \Delta_1$, $N \in \Delta_2$

Suy ra $M(m;1-m;m)$, $N(-4+3n;-5-n;4-n)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3n-m-4;-n+m-6;-n-m+4)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-m+2=0 \\ 11n-3m-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ m=4 \end{cases}$.

Suy ra $M(4;-3;4)$, $N(2;-7;2)$, $\overrightarrow{MN} = (-2;-4;-2)$.

Phương trình $MN: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{1}$.

2) Gọi H là hình chiếu của C lên AB, suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CH.AB = 2CH$

Ta có $CH \geq MN$ nên $S_{\Delta ABC}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $C \equiv N$ hay $C(2;-7;2)$.

3) Giả sử tồn tại tứ diện đều EFIJ với E, $F \in \Delta_1$ và I, $J \in \Delta_2$

Đặt $EF = 2x$, ta có M, N lần lượt là trung điểm của EF và IJ

Trong tam giác EMN ta có:

$EN^2 - EM^2 = MN^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x^2 = 24 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$

Gọi $E(t;1-t;t) \Rightarrow \overrightarrow{ME} = (t-4;4-t;t-4)$.

Do đó $ME = x \Leftrightarrow 3(t-4)^2 = 12 \Leftrightarrow t=6, t=2$

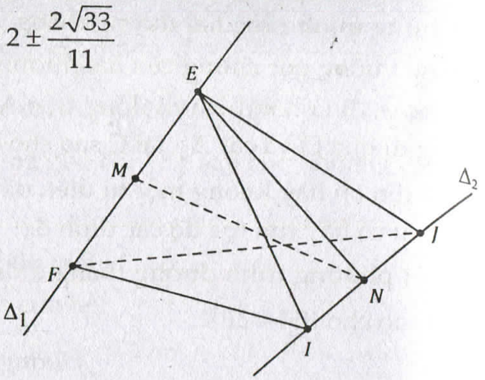
Suy ra $E(6;-5;6)$, $F(2;-1;2)$

Tương tự: $I(-4+3t';-5-t';4-t') \Rightarrow \overrightarrow{NI} = (3t'-6;-t'+2;-t'+2)$

Do đó $NI = x \Leftrightarrow 11(t'-2)^2 = 12 \Leftrightarrow t' = 2 \pm \frac{2\sqrt{33}}{11}$

$I\left(2+\frac{6\sqrt{33}}{11};-7-\frac{2\sqrt{33}}{11};2-\frac{2\sqrt{33}}{11}\right)$,

$J\left(2-\frac{6\sqrt{33}}{11};-7+\frac{2\sqrt{33}}{11};2+\frac{2\sqrt{33}}{11}\right)$



Ta có: $IF = 2\sqrt{12+\frac{6\sqrt{33}}{11}} \neq EF = 4\sqrt{3}$.

Vậy không tồn tại tứ diện đều **EFIJ**.

4) Ta có: $K(a;1-a;a)$, $H(-4+3b;-5-b;4-b)$

Suy ra $\overrightarrow{PK} = (a-1;-a-3;a-5)$, $\overrightarrow{PH} = (3b-5;-b-9;-b-1)$

Vì P, H, K nằm trên một đường thẳng và $PH = 2PK$ nên ta có các trường hợp sau

- $\overrightarrow{PH} = 2\overrightarrow{PK} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-5 = 2a-2 \\ -b-9 = -2a-6 \\ -b-1 = 2a-10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 3$. Suy ra $\overrightarrow{PK} = (2;-6;-2)$

Phương trình $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{-1}$.

- $\overrightarrow{PH} = -2\overrightarrow{PK} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-5 = -2a+2 \\ -b-9 = 2a+6 \\ -b-1 = -2a+10 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Bài 15.3.3. Trong không gian Oxyz cho ba đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1},\ \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2},\ \Delta_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1-3t \\ z = 4t \end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ cắt ba đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho B là trung điểm của AC.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A(a;1+2a;-1-a)$, $B(1+2b;-1+b;-2b)$, $C(3;1-3c;4c)$

Vì B là trung điểm của AC nên ta có:

$$\begin{cases} a+3 = 2+4b \\ 2a-3c+2 = -2+2b \\ -a+4c-1 = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4b = -1 \\ 2a-2b-3c = -4 \\ a-4b-4c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{6} \\ b = \frac{1}{24} \\ c = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra $A\left(-\frac{5}{6};-\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{23}{6};-\frac{7}{12};\frac{19}{6}\right)$.

Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = -\frac{5}{6}+46t \\ y = -\frac{2}{3}-7t \\ z = -\frac{1}{6}+38t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

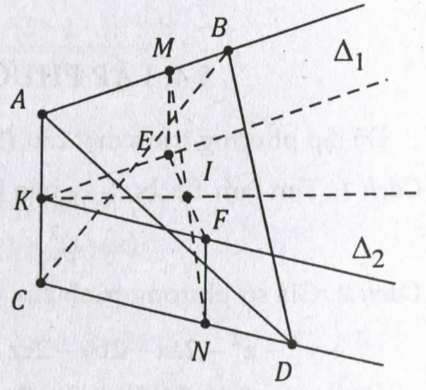
Bài 16.3.3. Trong không gian Oxyz bốn điểm $A(3;2;1)$, $B(5;-2;3)$, $C(2;1;0)$, $D(-4;5;2)$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các đường thẳng AB, CD sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-1;-1)$, $\overrightarrow{CD} = (-6;4;2)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6;0;-6)$, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{CD} = -48 \neq 0$

Do đó AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.



Hơn nữa $\begin{cases} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ nên AC là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AC, suy ra $K\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$; Δ_1 là đường thẳng đi qua K và song song với AB; Δ_2 là đường thẳng đi qua K và song song với CD.

Gọi E là hình chiếu của M lên Δ_1, F là hình chiếu của N lên Δ_2

Khi đó MENF là hình bình hành nên I là trung điểm của EF.

Đồng thời $KE = AM = CN = KF$ nên KI là đường phân giác Δ của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2. Mà Δ cố định nên I luôn nằm trên đường thẳng cố định Δ.

Đặt $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{CD}\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

Vì Δ là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 nên ta có hai trường hợp sau:

- $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$$\text{Phương trình } \Delta : \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{14}}\right)t \\ y = \frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{14}}\right)t \\ z = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{14}}\right)t \end{cases}.$$

- $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$$\text{Phương trình } \Delta : \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\right)t \\ y = \frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)t \\ z = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\right)t \end{cases}.$$

§ 4. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Để lập phương trình mặt cầu (S) ta có các cách sau :

Cách 1 : Tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. Khi đó phương trình của (S) là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Cách 2 : Giả sử phương trình của (S) có dạng :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Dựa vào giả thiết đề bài ta tìm được a, b, c, d. Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Khi tìm tâm và bán kính ta cần chú ý :

1) Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α).

- (S) và (α) tiếp xúc với nhau và chỉ khi $d(I,(\alpha)) = R$
- (S) và (α) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn khi và chỉ khi $d(I,(\alpha)) < R$.

Khi đó tâm của đường tròn giao tuyến là hình chiếu của I lên (α) và bán kính đường tròn là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I,(\alpha))}$.

2) Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ

- (S) và Δ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $d(I,\Delta) = R$

- (S) và Δ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi $d(I,\Delta) < R$, khi đó hình chiếu H của I lên Δ là trung điểm của AB và $R^2 = AH^2 + IH^2$ hay là $R^2 = \frac{AB^2}{4} + d^2(I,\Delta)$.

Ví dụ 3.4.1. Lập phương trình mặt cầu (S), biết (S):

1) Có tâm $I(1;1;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 1 = 0$

2) Có bán kính $R = 3$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$ tại điểm $A(1;1;-3)$

3) Có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$

4) Đi qua bốn điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$, $C(-2;2;2)$ và $D(1;-1;2)$

5) Có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$ và đi qua ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$.

Lời giải.

1) Ta có, bán kính mặt cầu $R = d(I,(P)) = \frac{|1+2+4+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{8}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{64}{9}$.

2) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Suy ra phương trình của đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại A nên tâm $I \in \Delta \Rightarrow I(1+t;1+2t;-3+2t)$

Và $d(I,(P)) = R = 3 \Leftrightarrow \frac{|9t|}{3} = 3 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

- Với $t = 1 \Rightarrow I(2;3;-1) \Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.
- Với $t = -1 \Rightarrow I(0;-1;-5) \Rightarrow (S): x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm $I \in d \Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên $d(I,(P)) = d(I,(Q)) = R$

$\Leftrightarrow \frac{|2-3t|}{3} = \frac{|6-3t|}{3} \Leftrightarrow 2 - 3t = -6 + 3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow I\left(-2;\frac{11}{3};\frac{11}{3}\right)$ và $R = \frac{2}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x+2)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

4) Giả sử phương trình mặt cầu

$(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì $A,B,C,D\in(S)\Rightarrow\begin{cases}-2b+d+1=0\\-4a-6b-2c+d+14=0\\4a-4b-4c+d+12=0\\-2a+2b-4c+d+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2b-1\\-4a-4b-2c+13=0\\4a-2b-4c+11=0\\-2a+4b-4c+5=0\end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}, c=\frac{5}{2}, d=2$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-x-3y-5z+2=0$.

5) Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì $\begin{cases}A,B,C\in(S)\\I\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c-2=0\\-4a-2c+d+5=0\\-2a+d+1=0\\-2a-2b-2c+d+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}d=2a-1\\-2a-2c+4=0\\a+b+c-2=0\\-2b-2c+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1\\d=1\end{cases}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$.

Ví dụ 3.4.2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+2z-12=0$

1) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O và cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn có bán kính bằng 3

2) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(2;0;3)$, có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{-1}$ và tiếp xúc với (α)

3) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(\beta): x-2y-2z+1=0$.

Lời giải.

1) Gọi R là bán kính mặt cầu (S), $h=d(O,(\alpha))=4$ và $r=3$ là bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và (α). Ta có: $R=\sqrt{r^2+h^2}=5$.

Phương trình $(S): x^2+y^2+z^2=25$.

2) Gọi I là tâm của mặt cầu, $I\in\Delta$ nên suy ra $I(2-t;-3+2t;3-t)$

Theo đề bài ta có: $d(I,(\alpha))=IA=R$

$\Leftrightarrow\frac{|2t+5|}{3}=\sqrt{6t^2-12t+9}\Leftrightarrow(2t+5)^2=9(6t^2-12t+9)$

$\Leftrightarrow 25t^2-64t+28=0\Leftrightarrow t=2, t=\frac{14}{25}$.

- $t=2\Rightarrow I(0;1;1)$, $R=3$.

  Phương trình $(S): x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$
- $t=\frac{14}{25}$, suy ra $I\left(\frac{36}{25};-\frac{47}{25};\frac{61}{25}\right)$ và $R=\frac{51}{25}$.

  Phương trình $(S):\left(x-\frac{36}{25}\right)^2+\left(y+\frac{47}{25}\right)^2+\left(z-\frac{61}{25}\right)^2=\left(\frac{51}{25}\right)^2$.

3) Gọi I là tâm mặt cầu, ta có $I(t;1-t;2t)$

Do (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và (β) nên ta có

$R=d(I,(\alpha))=d(I,(\beta))\Leftrightarrow\frac{|5t-11|}{3}=\frac{|t+1|}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\frac{5}{3}\end{array}\right.$

- $t=3\Rightarrow I(3;-2;6)$, bán kính $R=\frac{4}{3}$.

  Phương trình $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-6)^2=\frac{16}{9}$.
- $t=\frac{5}{3}\Rightarrow I\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$, bán kính $R=\frac{8}{9}$.

  Phương trình $(S):\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{64}{81}$.

Ví dụ 3.4.3. Lập phương trình mặt cầu S(I; R) biết

1) Mặt cầu có tâm $I(-2;3;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-2}$

2) Mặt cầu có tâm $I(-2;3;5)$ và cắt $\Delta': \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=4$

3) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$, đi qua $M(2;3;20)$ và tiếp xúc với $d': \frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+19}{-2}$.

Lời giải.

1) Đường thẳng Δ đi qua A(1;−1;−2), VTCP $\vec{u}=(1;1;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(-3;4;1)$, $\overrightarrow{AI}\wedge\vec{u}=(-9;-5;-7)$

Vì mặt cầu tiếp xúc với Δ nên ta có: $R=d(I,\Delta)=\frac{\left|\overrightarrow{AI}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{930}}{6}$.

Phương trình mặt cầu: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\frac{930}{36}$.

2) Đường thẳng Δ' đi qua B(−2;3;1), VTCP $\vec{u'}=(1;-1;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{BI}=(0;0;4)$, $\overrightarrow{BI}\wedge\vec{u'}=(4;4;0)$

Do đó $h=d(I,\Delta')=\frac{\left|\overrightarrow{BI}\wedge\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u'}\right|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

Gọi H là trung điểm AB, ta có IH = h, AH = 2

Suy ra $R=\sqrt{h^2+AH^2}=\frac{2\sqrt{33}}{3}$.

Phương trình mặt cầu: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=\frac{44}{3}$.

3) Đường thẳng d' qua điểm N(−4;−6;−19) và có $\vec{u}_{d'}(3;2;-2)$.

Vì tâm mặt cầu I ∈ d nên I(2 + t; 3 + t; −1 + 2t).

Ta có $\overrightarrow{MI}(t;\ t;\ 21+2t)$, $\overrightarrow{NI}(6+t;\ 9+t;\ 18+2t)$

nên $\overrightarrow{NI}\wedge\overrightarrow{u_{d'}}=(6t+54;\ -8t-66;\ t+15)$.

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên MI = d(I, d') = R.

Do đó $MI=\frac{\left|\overrightarrow{NI}\wedge\overrightarrow{u_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d'}}\right|}$, hay

$$\sqrt{t^2+t^2+(21+t)^2}=\frac{\sqrt{(6t+54)^2+(-8t-66)^2+(t+15)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 17(3t^2+42t+441)=101t^2+1734t+7497\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\frac{102}{5}\end{array}\right.$$

- Với t = 0 thì I(2; 3; −1), R = 21 nên phương trình mặt cầu $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=441$.

- Với $t=-\frac{102}{5}$ thì $I\left(-\frac{92}{5};-\frac{87}{5};-\frac{209}{5}\right)$, $R=\frac{\sqrt{20817}}{5}$ nên phương trình mặt cầu $\left(x+\frac{92}{5}\right)^2+\left(y+\frac{87}{5}\right)^2+\left(z+\frac{209}{5}\right)^2=\frac{20817}{25}$.

Ví dụ 3.4.4. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0.$$

1) Tìm m để mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$ và điểm A(3; 2; 1)

2) Tìm m để mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (β) : 2x − y + 2z − 8 = 0 theo một đường tròn có chu vi bằng 8π

3) Tìm m để mặt cầu (S) cắt đường thẳng Δ tại hai điểm M, N sao cho MN = 8.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(−1; 2; 3) và bán kính $R=\sqrt{17-m}$ với m < 17.

1) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua Δ và A.

Ta có Δ đi qua B(1; −1; 3), có VTCP $\vec{u}=(2;2;1)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;2)$, $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=(-7;6;2)$.

Phương trình (P) : 7x − 6y − 2z − 7 = 0.

Do đó (S) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi d(I, (P)) = R

$\Leftrightarrow\sqrt{17-m}=\frac{32}{\sqrt{89}}\Leftrightarrow m=\frac{489}{89}$.

2) Gọi r là bán kính của đường tròn là giao tuyến của (S) với (β)

Ta có: $2\pi r=8\pi\Rightarrow r=4$, $d(I,(\beta))=2$.

Vì $R^2=r^2+d^2(I,(\beta))$ nên ta có: $17-m=4^2+2^2\Leftrightarrow m=-3$.

3) Ta có $\overrightarrow{IB}=(2;-3;0)\Rightarrow\overrightarrow{IB}\wedge\vec{u}=(-3;-2;10)$

Do đó $d(I,\Delta)=\frac{\left|\overrightarrow{IB}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{113}}{3}$.

Vậy $R^2=\frac{MN^2}{4}+d^2(I,\Delta)\Leftrightarrow 17-m=16+\frac{113}{9}\Leftrightarrow m=-\frac{104}{9}$.

Ví dụ 3.4.5. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \\ z=-2+2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$.

1) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng Δ_2, tiếp xúc với đường thẳng Δ_1 và (α).

2) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên Δ_1, tiếp xúc với (α) và cắt đường thẳng Δ_2 tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{30}$

3) Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên Δ_2, tiếp xúc với Δ_1 và cắt (α) theo một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{13}$.

Lời giải.

1) Gọi I là tâm mặt cầu, R là bán kính. Do $I\in\Delta_2$ nên ta có: $I(3+t;-t;5+t)$

Đường thẳng Δ_1 đi qua $M_1(-1;-2;-2)$, VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;1;2)$

Suy ra $\overrightarrow{M_1I}=(t+4;-t+2;t+7)$, $\overrightarrow{M_1I}\wedge\overrightarrow{u_1}=(-3t-3;6;3t)$

Do đó: $d(I,\Delta_1)=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1I}\wedge\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\sqrt{(t+1)^2+4+t^2}=\sqrt{2t^2+2t+5}$

Vì (S) tiếp xúc với Δ_1 và (α) nên ta có: $d(I,(\alpha))=d(I,\Delta_1)=R$

$\Leftrightarrow |t+5|=\sqrt{2t^2+2t+5}\Leftrightarrow t^2-8t-20=0\Leftrightarrow t=10, t=-2$

- $t=-2$, suy ra $I(1;2;3)$, $R=3$.

  Phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

- $t=10$, suy ra $I(13;-10;15)$, $R=15$.

  Phương trình $(S):(x-13)^2+(y+10)^2+(z-15)^2=225$.

2) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(-1+2t;-2+t;-2+2t)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua $M_2(3;0;5)$, có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(1;-1;1)$

Suy ra $\overrightarrow{M_2I}=(2t-4;t-2;2t-7)$, $\overrightarrow{M_2I}\wedge\overrightarrow{u_2}=(3t-9;-3;-3t+6)$

Nên $d(I,\Delta_2)=\sqrt{3\left[(t-3)^2+1+(t-2)^2\right]}=\sqrt{3(2t^2-10t+14)}$

Vì mặt cầu tiếp xúc với (α) nên $R=d(I,(\alpha))=|3t-3|$

Từ đẳng thức $R^2=\dfrac{MN^2}{4}+d^2(I,\Delta_2)$ ta có:

$(3t-3)^2=30+3(2t^2-10t+14)\Leftrightarrow t^2+4t-21=0\Leftrightarrow t=-7,\ t=3$

- $t=3$, suy ra $I(5;1;4)$, $R=6$.

  Phương trình $(S):(x-5)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=36$.

- $t=-7$, suy ra $I(-15;-9;-16)$, $R=24$.

  Phương trình $(S):(x+15)^2+(y+9)^2+(z+16)^2=576$.

3) Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(3+t;-t;5+t)$

Ta có: $R=d(I,\Delta_1)=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1I}\wedge\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\sqrt{2t^2+2t+5}$

Vì (S) cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{13}$ nên ta có:

$$R^2=r^2+d^2(I,(\alpha))\Leftrightarrow 2t^2+2t+5=13+(t+5)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2-8t-33=0\Leftrightarrow t=-3, t=11.$$

- $t=-3$, suy ra $I(0;3;2)$, $R=\sqrt{17}$

  Phương trình $(S):x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=17$.

- $t=11$, suy ra $I(14;-11;16)$, $R=\sqrt{269}$

  Phương trình $(S):(x-14)^2+(y+11)^2+(z-16)^2=269$.

Ví dụ 3.4.6. Trong không gian Oxyz, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$.

1) Chứng minh rằng khi a, b, c thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định

2) Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R

3) Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{4}<r\le\dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Lời giải.

1) Sử dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(ABC) là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Mặt khác $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}=1$

Suy ra mặt phẳng (P) luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2) Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp OABC có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0.$$

Thay tọa độ các điểm A, B, C, O vào ta có:

$$\begin{cases}a^2-2ma+q=0\\ b^2-2nb+q=0\\ c^2-2cp+q=0\\ p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{a}{2};\ n=\frac{b}{2}\\ p=\frac{c}{2};\ q=0\end{cases}$$

Suy ra tâm của mặt cầu (S) là $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$

Và bán kính $R=IO=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^2+\frac{27}{8a}+\frac{27}{8a}\ge\frac{27}{4}\Leftrightarrow a^2+\frac{27}{4a}\ge\frac{27}{4}$.

Ta cũng có hai BĐT tương tự : $b^2+\frac{27}{4b}\ge\frac{27}{4}$; $c^2+\frac{27}{4c}\ge\frac{27}{4}$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{27}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{81}{4}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{27}{4}\Rightarrow R\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{3}{2}$. Vậy $\min R=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3) Ta có thể tích của tứ diện OABC là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$.

Diện tích toàn phần của tứ diện: $S_{tp}=\frac{1}{2}(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2})$

Suy ra $r=\frac{3V}{S_{tp}}=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

Từ giả thiết, suy ra $ab+bc+ca=2abc$.

Mà $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$. Nên $r\le\frac{abc}{2abc+\frac{2}{\sqrt{3}}abc}=\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Mặt khác: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2<(ab+bc+ca)^2=(2abc)^2\Rightarrow r>\frac{abc}{4abc}=\frac{1}{4}$.

BÀI TẬP

Bài 3.4.1. Lập phương trình mặt cầu (S) biết

1) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

2) Mặt cầu (S) có tâm nằm trên Ox và đi qua $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$

3) Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $mp(P): 2x-y+2z+4=0$.

4) Mặt cầu (S) đi qua $C(2;-4;3)$ và các hình chiếu của C lên ba trục tọa độ.

5) Mặt cầu (S) có tâm nằm trên mp(Oxy) và đi qua $M(1;0;2), N(-2;1;1)$, và $P(-1;-1;1)$.

Hướng dẫn giải

1) Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$

2) Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I\in Ox\Rightarrow I(x;0;0)$

Ta có $IA^2=IB^2\Leftrightarrow(x-1)^2+2^2+1^2=(x-3)^2+1^2+(-2)^2\Leftrightarrow x=2$

Suy ra tâm $I(2;0;0)$ và bán kính $R^2=IB^2=6$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=6$.

3) Vì mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với mp(P)

Suy ra $R=d(I,(P))=\frac{|2.3+2+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{20}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\frac{400}{9}$.

4) Gọi C_1,C_2,C_3 lần lượt là hình chiếu của C lên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz

Suy ra $C_1(2;0;0)$, $C_2(0;-4;0)$, $C_3(0;0;3)$.

Giả sử $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Do (S) đi qua C,C_1,C_2,C_3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-4a+8b-6c+d=-29\\ -4a+d=-4\\ 8b+d=-16\\ -6c+d=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{d+4}{4}\\ b=-\frac{d+16}{8}\\ c=\frac{d+9}{6}\\ -2d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=\frac{3}{2}\\ d=0\end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-3z=0$.

5) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên mp(Oxy) nên $I(x;y;0)$

Ta có: $\begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IN^2 = IP^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y=1 \\ 2x-4y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{10} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Và $R^2 = IM^2 = \dfrac{109}{20}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S): $\left(x-\dfrac{1}{10}\right)^2 + \left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2 + z^2 = \dfrac{109}{20}$.

Bài 3.4.2. Lập phương trình mặt cầu S(I,R) biết

1) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha_1): 3x+2y+z-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha_2): 2x+3y+z=0$

2) Mặt cầu có tâm $I(1;3;5)$ và cắt $\Delta': \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 12$

3) Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$, đi qua $M(1;1;4)$ và tiếp xúc với $d': \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{-4}$.

Hướng dẫn giải

1) Vì tâm $I \in \Delta$ nên $I(-2+t;\ 1+2t;\ -1-2t)$.

Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên :

$$d(I,(\alpha_1)) = d(I,(\alpha_2)) = R$$

Suy ra $\dfrac{|3(-2+t)+2(1+2t)-1-t-6|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \dfrac{|2(-2+t)+3(1+2t)-1-t|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow |6t-11| = |7t-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6t-11=7t-2 \\ 6t-11=2-7t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-9 \\ t=1 \end{array}\right.$$

- Nếu $t=1$ thì $I(-1;\ 3;\ -3), R = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

  $(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2 = \dfrac{25}{14}$.

- Nếu $t=-9$ thì $I(-11;\ -17;\ 17), R = \dfrac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

  $(x+11)^2+(y+17)^2+(z-17)^2 = \dfrac{4225}{14}$.

2) Đường thẳng Δ' qua điểm $M(2;\ -3;\ 0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;\ 1;\ 1)$

Ta có $\overrightarrow{IM}(1;\ 6;\ 5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_{\Delta}\right] = (1;\ -4;\ 5)$, do đó

$$d(I,\Delta') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{|\vec{u}_{\Delta'}|} = \dfrac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A, B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức : $R^2 = d^2(I,\Delta') + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 14+36 = 50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2 = 50$.

3) Đường thẳng d' qua điểm $N(-2;-2;4)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}} = (1;1;-4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I \in d$ nên $I(2+t;\ -t;\ 3+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (t+1;\ -t-1; 2t-1)$, $\overrightarrow{NI} = (4+t; 2-t; -1+2t)$ nên

$$\left[\overrightarrow{NI}, \vec{u}_{d'}\right] = (2t-7; 6t+15; 2t+2).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI = d(I,d') = R$.

Do đó $MI = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NI}, \vec{u}_{d'}\right]\right|}{|\vec{u}_{d'}|}$

Hay $\sqrt{(2t-1)^2+2(1+t)^2} = \dfrac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}$

$$\Leftrightarrow 18(6t^2+3) = 44t^2+160t+278 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ thì $I(1;1;1)$, $R=3$ nên phương trình mặt cầu

  $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 9$

- Với $t=\dfrac{7}{2}$ thì $I\left(\dfrac{11}{2}; -\dfrac{7}{2}; 10\right), R = \dfrac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu

  $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2 + (z-10)^2 = \dfrac{153}{2}$.

Bài 3.4.3. Trong không giian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+m=0.$$

Tìm m sao cho:

1) Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$.

2) Mặt cầu cắt mặt phẳng $(Q): 2x-y-2z+1=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 4π.

3) Mặt cầu cắt đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB vuông (I là tâm mặt cầu).

Hướng dẫn giải

Điều kiện tồn tại mặt cầu $14-m>0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;\ 2;\ -3)$ và bán kính $R=\sqrt{14-m}$.

1) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là

$$d(I;(P))=\frac{|-1-2.2+2.(-3)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=4$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên $R=4 \Leftrightarrow m=-2$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-2$.

2) Ta có $d(I;(Q))=\dfrac{|-2-2+6+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$.

Vì đường tròn giao tuyến có diện tích là 4π nên có bán kính $r=2$, do đó bán kính của mặt cầu là: $R^2=r^2+d^2(I,(Q)) \Leftrightarrow R^2=5 \Leftrightarrow 14-m=5 \Leftrightarrow m=9$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m=9$.

3) Gọi $H(-1-t;\ 2t;\ 2-t)$ là hình chiếu của $I(-1;\ 2;\ -3)$ trên Δ.

Ta có $\overrightarrow{IH}(-t;\ 2t-2;\ 5-t)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}(-1;\ 2;\ -2)$ nên

$IH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u}_\Delta=0 \Leftrightarrow t+4t-4-10+2t=0 \Leftrightarrow t=2$

Vậy $\overrightarrow{IH}(-2;\ 2;\ 3) \Rightarrow IH=\sqrt{17}$.

Do tam giác IAB cân tại I nên vuông cân tại I, do đó tam giác IHA cũng vuông cân tại H, vì thế $R=IA=\sqrt{2}.IH=\sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{14-m}=\sqrt{34} \Rightarrow m=-20$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-20$.

Bài 3.4.4. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$$

và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y+z+7=0$.

1) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó.

2) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;5;-2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=5$.

1) Ta có $d(I,(\alpha))=\dfrac{|2+2+1+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=4<R$, suy ra (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn tâm H bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(\alpha))}=3$

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α), suy ra phương trình của HI là:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \end{cases}$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+2t \\ z=1+t \\ 2x+2y+z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=-\dfrac{5}{3} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy tâm $H\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

2) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;6;-4)$ nên phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+3t \\ y=2-2t \end{cases}$

Vì $IA<R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{25-d^2(I,(P))}$.

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P), ta luôn có $IH \le IK$ nên suy ra $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Do $H \in AB \Rightarrow H(1+t;-1+3t;2-2t) \Rightarrow \overrightarrow{IH}=(t;3t-2;1-2t)$

Vì $IH \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow t+3(3t-2)-2(1-2t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{7} \Rightarrow \overrightarrow{IH}=\left(\dfrac{4}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{7}\right)$

Vậy phương trình $(\alpha):4x-2y-z-4=0$.

Bài 3.4.5. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha):2x-2y-z+1=0$, $(\beta):x+2y-2z-4=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=8$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{n_1}=(2;-2;-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra $\vec{u}=\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(2;1;2)$ là VTCP của đường thẳng d

Hơn nữa điểm $A(6;4;5)$ là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A \in d$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;0)$, bán kính $R=\sqrt{13-m}$ với $m<13$.

$\overrightarrow{IA}=(8;1;5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)\Rightarrow d(I,d)=3$

Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow AH=\dfrac{AB}{2}=4$ và $IH=3$

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2=IH^2+AH^2\Leftrightarrow R^2=9+16$

$$\Leftrightarrow 13-m=25\Leftrightarrow m=-12.$$

Vậy $m=-12$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.4.6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Tìm m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Với m vừa tìm được hãy xác định tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$, bán kính $R=3$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I, vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)

$$\Leftrightarrow d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{\left|m^2+3m-1\right|}{3}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+3m-10=0\\ m^2+3m+8=0\ \text{VN}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-5, m=2$$

Khi đó $(P): 2x+2y+z-10=0$. Tọa độ tiếp điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}\\ 2x+2y+z-10=0\end{cases}$, giải hệ này ta được $x=3, y=1, z=2\Rightarrow A(3;1;2)$.

Bài 3.4.7. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+5=0$

1) Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho giao của (S) với mp(P) là đường tròn (C) có chu vi bằng 8π

2) Chứng minh rằng mặt cầu (S) nói trong phần 1 tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 2x-2=y+3=z$

3) Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và tiếp xúc với (S).

Hướng dẫn giải

1) Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn (C).

Ta có: $2\pi r=8\pi\Rightarrow r=4$ và $d(I,(P))=3$ nên $R=\sqrt{r^2+d^2(I,(P))}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

2) Đường thẳng Δ có $u_\Delta=(1;2;2)$ là VTCP và đi qua $A(1;-3;0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}=(0;5;-2)\Rightarrow[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]=(-14;2;5)\Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AI}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=5$

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S).

Cách 2.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\ y=-3+2t\\ z=2t\end{cases}$, thay vào phương trình mặt cầu (S)

ta được: $t^2+(2t-5)^2+(2t+2)^2=25\Leftrightarrow(3t-2)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra mặt cầu (S) và Δ giao nhau tại một điểm $M(\frac{5}{3};-\frac{5}{3};\frac{4}{3})$.

Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M.

3) Vì mp(Q) chứa Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) nên M là tiếp điểm của mp(Q) và mặt cầu (S)

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{IM}\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{11}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ làm VTPT.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-11y+10z-35=0$.

§ 5. CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Phương pháp: Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

1) Tìm M sao cho $P=\alpha_1MA_1^2+\alpha_2MA_2^2+\ldots+\alpha_nMA_n^2$

a) Nhỏ nhất khi $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$

b) Lớn nhất khi $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<0$

) Tìm M sao cho $P = \left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất,

ti $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$.

Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Khi đó :

1) $P = \alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right)^2 + \alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right)^2 + ... + \alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)^2$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)IM^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_1 IA_i^2$$

Do $\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 IA_i^2$ không đổi nên:

- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất
- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất

2) $P = \left|\alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right) + ... + \alpha_n\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right|.MI$

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Chú ý:

- Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).
- Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S), cắt (S) tại hai điểm A, B (IA > IB) thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ ($M \equiv A$).

Bài toán 2. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1) MA + MB nhỏ nhất.

2) $|MA - MB|$ lớn nhất với $d(A, (P)) \neq d(B, (P))$.

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) > 0$ thì hai điểm A, B cùng phía với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía với mặt phẳng (P).

1) MA + MB nhỏ nhất.

- *Trường hợp 1:* Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên MA + MB nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- *Trường hợp 2:* Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và MA = MA' nên $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Vậy MA + MB nhỏ nhất bằng A'B khi $M = A'B \cap (P)$.

2) $|MA - MB|$ lớn nhất.

- *Trường hợp 1:* Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- *Trường hợp 2:* Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P) và MA = MA' nên $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$.

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng A'B khi $M = A'B \cap (P)$.

Bài toán 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

1) (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A \notin \Delta$ đến (P) lớn nhất

2) (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất

3) (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

1) Giả sử đường thẳng $\Delta: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ và $A(x_0; y_0; z_0)$

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

Trong đó $Aa + Bb + Cc = 0 \Rightarrow A = -\frac{bB + cC}{a}$ $(a \neq 0)$ (1)

Khi đó $d(A,(P)) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (2)

Thay (1) vào (2) và đặt $t = \frac{B}{C}$, ta được $d(A,(P)) = \sqrt{f(t)}$

Trong đó $f(t) = \frac{mt^2 + nt + p}{m't^2 + n't + p'}$, khảo sát hàm f(t) ta tìm được max f(t). Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A, B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A, B.

2) và 3) làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1) Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có:

$d(A,(P)) = AH \le AK$, mà AK không đổi.

Do đó $d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K, nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

2) Nếu $\Delta \perp (Q) \Rightarrow \widehat{((P),(Q))} = 90^0$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

• Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH \perp (P)$, $CK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là $\widehat{BCH}$. Ta có $\sin\widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \ge \frac{BK}{BC}$.

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên $\widehat{BCH}$ nhỏ nhất khi $H \equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_Q}\right]\right]$ là VTPT của (P).

3) Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH \perp (P)$, $AK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là $\widehat{AMH}$.

Ta có $\cos\widehat{AMH} = \frac{HM}{AM} \ge \frac{KM}{AM}$.

Mà $\frac{KM}{AM}$ không đổi, nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d',Δ). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$ là VTPT của (P).

Ví dụ 3.5.1. Trong không gian Oxyz cho ba điểm:

$A(1;1;1),\ B(-1;2;0),\ C(3;-1;2)$.

1) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ sao cho:

$P = 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

2) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 7 = 0$ sao cho:

$P = \left|3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

3) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 861$ sao cho $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1) Gọi $D(x;y;z)$ là điểm thỏa $2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} + 3(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - 4(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = 4\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$ (1)

Mà $\overrightarrow{DA} = (1-x;1-y;1-z)$, $\overrightarrow{AC} = (2;-2;1)$, $\overrightarrow{AB} = (-2;1;-1)$

Nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 4.2 - 3.(-2) \\ 1-y = 4.(-2) - 3.1 \\ 1-z = 4.1 - 3.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 12 \\ z = -6 \end{cases} \Rightarrow D(-13;12;-6)$.

Khi đó:

$$P = 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)^2$$

$$= MD^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC}\right) + 2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$$

$$= MD^2 + 2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$$

Do $2AD^2 + 3BD^2 - 4DC^2$ không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi MD nhỏ nhất.

Mà M thuộc Δ nên MD nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của D lên Δ.

Ta có: $M(1+2t;t;-1-t) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = (2t+14;t-12;-t+5)$

Vì $DM \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2(2t+14) + (t-12) - (-t+5) = 0$

$\Leftrightarrow 6t + 11 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{11}{6} \Rightarrow M\left(-\frac{8}{3};-\frac{11}{6};\frac{5}{6}\right)$.

Vậy $M\left(-\frac{8}{3};-\frac{11}{6};\frac{5}{6}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Gọi $F(x;y;z)$ là điểm thỏa điều kiện :

$3\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} - 7\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{CB}$.

Từ đây ta tìm được $F(-23;20;-11)$

Khi đó: $P = \left|3\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}\right) + 5\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FB}\right) - 7\left(\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC}\right)\right| = MF$

Do đó P nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của F lên (α)

Suy ra phương trình MF: $\begin{cases} x = -23 + 2t \\ y = 20 - t \\ z = -11 + 2t \end{cases} \Rightarrow M(-23+2t;20-t;-11+2t)$

Mà $M \in (\alpha)$ nên ta có: $2(2t-23) - (20-t) + 2(2t-11) + 7 = 0 \Leftrightarrow t = 9$

Vậy $M(-5;11;7)$ là điểm cần tìm.

3) Gọi K là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{KA} - 7\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, suy ra $K(-21;16;10)$

Khi đó: $P = -MK^2 + 2KA^2 - 7KB^2 + 4KC^2$

Suy ra P nhỏ nhất khi và chỉ khi MK lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, suy ra $\overrightarrow{KI} = (22;-16;-11)$

Phương trình KI: $\begin{cases} x = 1 + 22t \\ y = -16t \\ z = -1 - 11t \end{cases}$

Thay phương trình của KI vào phương trình (S) ta có:

$$(22t)^2 + (-16t)^2 + (-11t)^2 = 861 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Suy ra KI cắt (S) tại hai điểm $K_1(23;-16;-12)$, $K_2 = (-21;16;10)$

Vì $KK_1 > KK_2$ nên MK lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv K$.

Vậy $M(23;-16;-12)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.5.2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 8 = 0$ và ba điểm $A(1;1;-1)$, $B(-3;5;5)$, $C(7;-4;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (α) sao cho:

1) $MA + MB$ nhỏ nhất 2) $|MA - MC|$ lớn nhất.

Lời giải.

Với $M(x;y;z)$, ta đặt $f(M) = 2x - y + 2z - 3$

Ta có $f(A).f(B) > 0$, $f(A).f(C) < 0$ nên A, B ở về cùng một phía so với (α), còn A và C nằm về hai phía so với (α).

1) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (α).

Ta có phương trình AA' là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm I của AA' và (α) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 2t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \Rightarrow I(3;0;1) \\ z = 1 \end{cases}$$

Vì I là trung điểm của AA′ nên $A'(5;-1;3)$ và A', B nằm khác phía so với (α).

Khi đó với mọi điểm M thuộc (α), ta luôn có:

$MA + MB = A'M + MB \geq A'B$. Đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (\alpha)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B} = (-8;6;2)$, phương trình A'B: $\begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 + t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow M(1;2;4) \\ z = 4 \end{cases}$.

Vậy $M(1;2;4)$ là điểm cần tìm.

2) Ta có A', C nằm về khác phía so với (α).

Khi đó với mọi điểm M thuộc (α), ta có:

$|MA - MC| = |MA' - MC| \leq A'C$. Đẳng thức xảy ra khi $M = A'C \cap (\alpha)$

Ta có: $\overrightarrow{A'C} = (2;-3;1)$, phương trình A'C: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + t \\ 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

Vậy $M(3;2;2)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.5.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(-3;-2;3)$.

Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho: $MA + MB$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $M \in \Delta$ nên $M(1+t;2t;-1-t)$, suy ra

$\overrightarrow{AM} = (t-2;2t-2;-t)$, $AM = \sqrt{6t^2 - 12t + 8}$

$\overrightarrow{BM} = (t+4;2t+2;-t-4)$, $BM = \sqrt{6t^2 + 24t + 36}$

Ta có

$$MA + MB = \sqrt{6(t-1)^2 + 2} + \sqrt{6(t+2)^2 + 12} = 6\left[\sqrt{(1-t)^2 + \frac{1}{3}} + \sqrt{(t+2)^2 + 2}\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

Ta có:

$$\sqrt{(1-t)^2+\frac{1}{3}}+\sqrt{(t+2)^2+2}\ge\sqrt{(1-t+2+t)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{34\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$$

Suy ra $MA+MB\ge 2\sqrt{34\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1-t}{t+2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+1}=\frac{8-3\sqrt{6}}{5}$

Hay $M\left(\frac{13-3\sqrt{6}}{5};\frac{16-6\sqrt{6}}{5};\frac{-13+3\sqrt{6}}{5}\right)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 3.5.4. Trong không gian cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$, mặt phẳng $(\alpha):x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $M(1;2;1)$, $N(-1;0;2)$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và cách O một khoảng lớn nhất

2) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (α) một góc nhỏ nhất

3) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M, N và tạo với Δ một góc lớn nhất.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;0)$

1) **Cách 1:** Giải bằng phương pháp đại số

Vì (P) chứa Δ nên phương trình của (P) có dạng:

$$a(x-1)+b(y-1)+cz=0 \text{ với } a^2+b^2+c^2>0 \text{ và } a+2b+2c=0$$

Khi đó $d(O,(P))=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|b+2c|}{\sqrt{5b^2+8bc+5c^2}}$

Nếu $c=0$ ta có $d(O,(P))=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Nếu $c\ne 0$, ta có: $d(O,(P))=\sqrt{\frac{b^2+4bc+4c^2}{5b^2+8bc+5c^2}}=\sqrt{\frac{t^2+4t+4}{5t^2+8t+5}}$, $t=\frac{b}{c}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+4t+4}{5t^2+8t+5}$, ta có:

$f'(t)=\frac{-12t^2-30t-12}{(5t^2+8t+5)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2, t=-\frac{1}{2}$

Do $f(-2)=0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{10}$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=\frac{1}{5}$ nên ta có $\max f(t)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Suy ra $d(O,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{b}{c}=-\frac{1}{2}$

Ta chọn $b=1$, $c=-2\Rightarrow a=2$.

Vậy phương trình $(P):2x+y-2z-3=0$.

Cách 2: Giải bằng phương pháp hình học

Gọi K là hình chiếu của O lên Δ, suy ra

$K(1+t;1+2t;2t)$, $\overrightarrow{OK}=(1+t;1+2t;2t)$

Vì $OK\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow 1+t+2(1+2t)+2.2t=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$

Suy ra $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{OK}=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P), ta có: $d(O,(P))=OH\le OK=1$

Đẳng thức xảy ra khi $H\equiv K$.

Do đó (P) cách O một khoảng lớn nhất khi và chỉ khi (P) đi qua K và vuông góc với OK. Từ đó ta suy ra phương trình của (P) là: $2x+y-2z-3=0$.

2) **Cách 1:** Giải bằng phương pháp đại số

Vì (Q) chứa Δ nên phương trình của (Q) có dạng:

$$a(x-1)+b(y-1)+cz=0 \text{ với } a^2+b^2+c^2>0 \text{ và } a+2b+2c=0$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Q) và (α), ta có:

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}=\frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{4|b|}{3\sqrt{5b^2+8bc+5c^2}}$$

Nếu $c=0$, ta có $\cos\varphi=0$

Nếu $c\ne 0$ ta có $\cos\varphi=\frac{4}{3}.\frac{1}{\sqrt{5t^2+8t+5}}$, với $t=\frac{c}{b}$.

Ta có φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\cos\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow 5t^2+8t+5$ nhỏ nhất.

Mà $5t^2+8t+5=5\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\ge\frac{9}{5}$. Đẳng thức có khi $t=-\frac{4}{5}$.

Do đó, φ nhỏ nhất khi $\frac{c}{b}=-\frac{4}{5}$, ta chọn $c=4$, $b=-5$, $a=2$

Vậy phương trình $(Q):2x-5y+4z+3=0$.

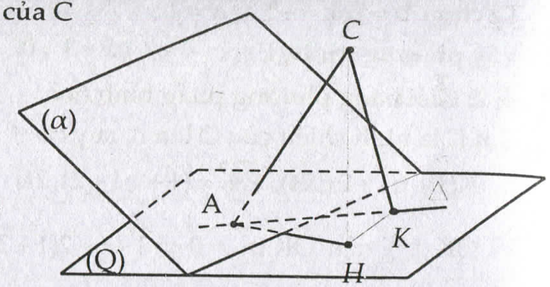
Cách 2: Giải bằng phương pháp hình học.

Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α)

Ta có phương trình $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2t\end{cases}$, lấy $C(2;-1;2)\in d$, $C\ne A$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (Q) và Δ, khi đó $\varphi = \widehat{BCH}$ và

$$\sin\varphi = \sin\widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \geq \frac{AK}{AC}.$$



Mà $\frac{AK}{AC}$ không đổi, nên suy ra φ nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (α) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (ACK).

Mặt phẳng (ACK) đi qua Δ và vuông góc với (α) nên $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = (-8;0;4)$ là VTPT của (ACK).

Do (Q) đi qua Δ và vuông góc với (ACK) nên $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{u_\Delta}\right] = (-8;20;-16) = -4(2;-5;4)$

Vậy phương trình $(Q): 2x - 5y + 4z + 3 = 0$.

3) **Cách 1:** Giải bằng phương pháp đại số

Vì (β) đi qua M nên phương trình (β) có dạng:

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-1) = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

$N \in (\alpha)$ nên suy ra $-2a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = 2a + 2b$

Gọi φ là góc giữa Δ và (β), ta có:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|5a+6b|}{3\sqrt{5a^2+8ab+5b^2}}$$

Nếu $b = 0$, ta có $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Nếu $b \neq 0$, ta có: $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{25a^2+60ab+36b^2}{5a^2+8ab+5b^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{25t^2+60t+36}{5t^2+8t+5}}$, $t = \frac{a}{b}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{25t^2+60t+36}{5t^2+8t+5}$, có $f'(t) = \frac{-100t^2-110t+12}{(5t^2+8t+5)^2}$

Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}, t = -\frac{6}{5}$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 5,\ f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{65}{9},\ f\left(-\frac{6}{5}\right) = 0.$$

Ta có φ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow f(t)$ lớn nhất $\Leftrightarrow t = \frac{1}{10}$

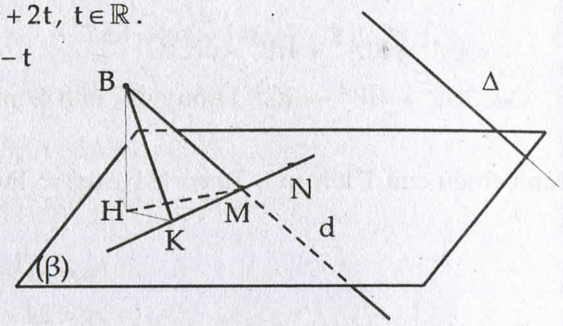
Hay $\frac{a}{b} = \frac{1}{10}$, ta chọn $a = 1, b = 10, c = 22$.

Phương trình $(\beta): x + 10y + 22z + 41 = 0$.

Cách 2: Giải bằng phương pháp hình học

Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với Δ. Ta có: $\overrightarrow{NM} = (2;2;-1)$

Suy ra phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$



Trên d ta lấy điểm B(3;4;0).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (β) và MN, khi đó $\widehat{((\alpha),\Delta)} = \widehat{BMH}$.

Ta có: $\cos\widehat{BMH} = \frac{MH}{MB} \geq \frac{MK}{MB}$,

mà $\frac{MK}{MB}$ không đổi nên $\widehat{BMH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (β) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\gamma) = (MN, d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\gamma} = \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{u_\Delta} = (6;-5;2)$. Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = (-1;-10;-22)$

Vậy phương trình $(\beta): x + 10y + 22z + 41 = 0$.

🕮 BÀI TẬP

Bài 3.5.1. Trong không gian cho ba điểm $A(1;2;3), B(-1;0;-3), C(2;-3;-1)$

1) Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất $S = 3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$,

2) Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất: $P = \left|\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\right|$

3) Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36$ sao cho biểu thức $F = MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) **Cách 1:**

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} - 6\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = 6\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA} = (1-x;2-y;3-z), 6\overrightarrow{AC} = (6;-30;-24), 4\overrightarrow{AB} = (-8;-8;-24)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=6+8 \\ 2-y=-30+8 \\ 3-z=-24+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-13 \\ y=24 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow I(-13;24;3)$

Khi đó:

$$S=3\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2-6\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-6\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+4IB^2-6IC^2$$

$$=IM^2+3IA^2+4IB^2-6IC^2.$$

Do $3IA^2+4IB^2-6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (α). Ta có $IM \perp (\alpha) \Rightarrow IM: \begin{cases} x=-13+2t \\ y=24+t \\ z=3-2t \end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=-13+2t \\ y=24+t \\ z=3-2t \\ 2x+y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=25 \\ z=1 \end{cases}$

Vậy $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a;b;c) \in (\alpha) \Rightarrow 2a+b-2c-1=0$

Suy ra: $3MA^2=3a^2+3b^2+3c^2-6a-12b-18c+42$

$4MB^2=4a^2+4b^2+4c^2+8a+24c+40$

$6MC^2=6a^2+6b^2+6c^2-24a+36b+12c+84$

Suy ra $S=a^2+b^2+c^2+26a-48b-6c-2$

$=(a+11)^2+(b-25)^2+(c-1)^2+4a+2b-4c-749 \geq 2(2a+b-2c-1)-747 \geq -747$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=-11, b=25, c=1$ hay $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm

2) **Cách 1:** Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-7\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=\left(1-x;2-y;3-z\right)$, $-7\overrightarrow{AB}=(14;14;42)$, $5\overrightarrow{AC}=(5;-25;-20)$

Nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=14+5 \\ 2-y=14-25 \\ 3-z=42-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-18 \\ y=13 \\ z=-19 \end{cases} \Rightarrow I(-18;13;-19)$

Khi đó: $P=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=MI$

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ

$M \in \Delta \Rightarrow M\left(1+2t;-1+3t;1-t\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(2t+19;3t-14;-t+20)$

Vì $IM \perp \Delta \Rightarrow 2(2t+19)+3(3t-14)-(-t+20)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{12}{7}$

Vậy $M\left(\dfrac{31}{7};\dfrac{29}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M\left(1+2t;-1+3t;1-t\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MA}=\left(-2t;3-3t;2+t\right)$, $-7\overrightarrow{MB}=\left(14+14t;-7+21t;28-7t\right)$

$5\overrightarrow{MC}=\left(5-10t;-10-15t;-10+5t\right)$

Do đó $\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=\left(2t+19;3t-14;-t+20\right)$

Nên $P^2=(2t+19)^2+(3t-14)^2+(t-20)^2=14t^2-48t+957$

$$=14\left(t-\frac{12}{7}\right)^2+\frac{6411}{7} \geq \frac{6411}{7}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=\dfrac{12}{7}$. Vậy $M\left(\dfrac{31}{7};\dfrac{29}{7};-\dfrac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

3) Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA}-4\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

Ta tìm được $E\left(10;-2;16\right)$.

Khi đó $F=-EM^2+EA^2-4EB^2+2EC^2$

Vì $EA^2-4EB^2+2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;8)$, $\overrightarrow{IE}=\left(8;-4;8\right) \Rightarrow IE: \begin{cases} x=2+8t \\ y=2-4t \\ z=8+8t \end{cases}$

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=2+8t \\ y=2-4t \\ z=8+8t \\ (x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36 \end{cases} \Rightarrow 8^2t^2+4^2t^2+8^2t^2=36 \Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}.$$

- $t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow M(6;0;12) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(2;-2;4) \Rightarrow MI=2\sqrt{6}$
- $t=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow N\left(-2;4;4\right) \Rightarrow \overrightarrow{IN}=(-4;2;4) \Rightarrow NI=6$

Do $NI > MI$ nên ta có được:

- F lớn nhất khi và chỉ khi $E \equiv M \Rightarrow E(6;0;12)$
- F nhỏ nhất khi và chỉ khi $E \equiv N \Rightarrow E(-2;4;4)$.

Bài 3.5.2. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-6=0$ và hai điểm $A(5;-2;6)$, $B(3;-2;1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

1) $MA+MB$ nhỏ nhất   2) $|MA-MB|$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT

Thay tọa độ hai điểm A, B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với (P).

1) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có $MA = MA'$.

Do đó $\forall M \in (P): MA+MB = A'M+MB \ge A'B$, mà A'B không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra $MA+MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

Ta có: $AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x=5+2t \\ y=-2-t \\ z=6+2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=5+2t \\ y=-2-t \\ z=6+2t \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \Rightarrow H(1;-1;2) \\ z=2 \end{cases}$$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=2x_H-x_A=-3 \\ y_{A'}=2y_H-y_A=2 \\ z_{A'}=2z_H-z_A=-2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3;2;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=(6;-4;3)$, phương trình $A'B: \begin{cases} x=-3+6t \\ y=2-4t \\ z=-2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=-3+6t \\ y=2-4t \\ z=-2+3t \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{21}{11} \\ y=-\dfrac{14}{11} \\ z=\dfrac{5}{11} \end{cases}$

Vậy $M\left(\dfrac{21}{11};-\dfrac{14}{11};\dfrac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Vì A, B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M \in (P)$ ta luôn có $|AM-MB| \le AB$, đẳng thức xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

Phương trình $AB: \begin{cases} x=5-2t \\ y=-2 \\ z=6-5t \end{cases}$

Tọa độ $M: \begin{cases} x=5-2t \\ y=-2 \\ z=6-5t \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{7} \\ y=-2 \\ z=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$. Vậy $M\left(\dfrac{17}{7};-2;-\dfrac{3}{7}\right)$.

Tương tự ta giải được bài toán tổng quát sau:

Bài 3.5.3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(1;-2;1)$, $C(2;1;3)$. Tìm $M \in \Delta$ sao cho:

1) $MA+MB$ nhỏ nhất   2) $MA+MC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(t;2t;1-t)$, $\overrightarrow{AM}=(t-3;2t-2;-t+2)$,

$\overrightarrow{BM}=(t-1;2t+2;-t)$, $\overrightarrow{CM}=(t-2;2t-1;-t-2)$

1) Ta có: $MA+MB=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2+6t+5}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, ta có:

$$MA+MB \ge \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t+\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}=\sqrt{38}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t=\sqrt{6}t+\dfrac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

2) Ta có: $AM+CM=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2-4t+9}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt6}{2}-\sqrt6 t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt6 t+\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt3}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\left(\frac{3\sqrt6}{2}+\frac{\sqrt6}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{5\sqrt3}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{96+5\sqrt{42}}{3}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}-t\right)\frac{5}{\sqrt3}=\frac{\sqrt{14}}{2}\left(\frac{1}{3}+t\right)\Leftrightarrow t=\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}}$.

Vậy $M\left(\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}};\frac{2\left(45-\sqrt{42}\right)}{10+3\sqrt{42}};\frac{4\sqrt{42}-35}{10+3\sqrt{42}}\right)$.

Bài 3.5.4. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng Δ có phương trình : $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất.

2) Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

3) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1),N(-1;2;-1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $B(1;0;-1)$ và có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP.

1) **Cách 1:** Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là VTPT của (Q), suy ra phương trình của (Q) có dạng: $a(x-1)+by+c(z+1)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a+c=0$ (1)

Do $\Delta\subset(Q)$ nên $2a+b-c=0\Rightarrow c=2a+b$.

Do đó: $d(A,(Q))=\frac{|2c-b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}=\sqrt{\frac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}}$

Nếu $b=0\Rightarrow d(A,(Q))=\frac{4}{\sqrt5}$

Nếu $b\ne0$ thì ta đặt $t=\frac{a}{b}$, ta có: $\frac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}=\frac{16t^2+8t+1}{5t^2+4t+2}=f(t)$

Xét hàm số f(t) với $t\in\mathbb{R}$ ta có: $f'(t)=\frac{24t^2+54t+12}{(5t^2+4t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2,t=-\frac{1}{4}$

Suy ra $\max f(t)=f(-2)=\frac{7}{2}$, do đó $\max d(A,(Q))=\frac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được khi $a=-2b$

Chọn $b=-1$ ta tìm được $a=2,c=3$.

Vậy phương trình $(Q):2x-y+3z+1=0$.

Cách 2: Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q), khi đó $d(A,(Q))=AH\le AK$, mà AK không đổi nên $d(A,(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

Vì $K\in\Delta\Rightarrow K(1+2t;t;-1-t)\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(2t;t+1;-t-2)$

$AK\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AK}.\vec{u}=0\Leftrightarrow4t+t+1+t+2=0$

$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow K\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{AK}=\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Vậy phương trình $(Q):2x-y+3z+1=0$.

2) **Cách 1:** Tương tự như trên ta có $(Q):ax+by+(2a+b)z+a+b=0$

Gọi $\alpha=\widehat{((P),(R))}$, $0^0\le\alpha\le90^0$.

Ta có: $\cos\alpha=\frac{|2a-b+2(2a+b)|}{3\sqrt{a^2+b^2+(2a+b)^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+12ba+36a^2}{2b^2+4ab+5a^2}}$.

Nếu $a=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt2}$

Nếu $a\ne0$, đặt $t=\frac{b}{a}$ thì ta có: $\frac{b^2+12ba+36a^2}{2b^2+4ab+5a^2}=\frac{t^2+12t+36}{2t^2+4t+5}=f(t)$

Khảo sát hàm số f(t) ta tìm được $\max f(t)=f(-\frac{7}{10})=\frac{53}{6}$

Suy ra $\max\{\cos\alpha\}$ đạt được khi $\frac{b}{a}=-\frac{7}{10}$, chọn $b=-7\Rightarrow a=10$

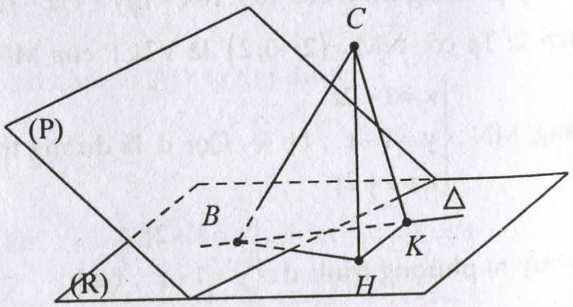
Vậy phương trình $(R):10x-7y+13z+3=0$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

Ta có phương trình

$$d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases},$$

lấy $C(3;-1;1)\in d$, $C\ne B$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (R) và Δ, khi đó $\alpha = \widehat{BCH}$ và $\sin\alpha = \sin\widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}$.

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên suy ra α nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (R) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK).

Mặt phẳng (BCK) đi qua Δ và vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{u}\right] = (-1;6;4)$ là VTPT của (BCK).

Do (R) đi qua Δ và vuông góc với (BCK) nên $\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{n_1}, \vec{u}\right] = (10;-7;13)$ là VTPT của (R), suy ra phương trình của $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

3) **Cách 1:** Giả sử phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$

Do $M, N \in (\alpha)$ nên $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -a+2b-c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\frac{3}{2}b \\ c = -a + \frac{1}{2}b \end{cases}$

Ta viết lại dạng phương trình của (α) như sau: $2ax + 2by + (b-2a)z - 3b = 0$

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = (2a;2b;b-2a)$ là VTPT của (α). Gọi $\varphi = \widehat{(\Delta,(\alpha))}$

Ta có: $\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \frac{|4a+2b-b+2a|}{\sqrt{6}.\sqrt{4a^2+4b^2+(b-2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{b^2+12ab+36a^2}{5b^2-4ab+8a^2}}$

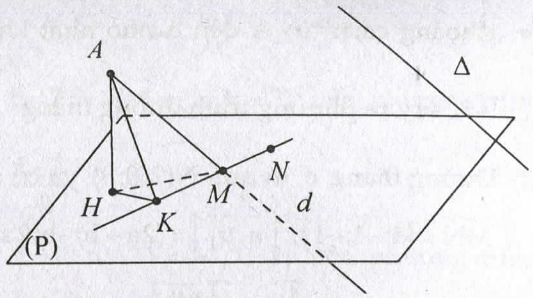
. Nếu $a = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, với $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+12t+36}{5t^2-4t+8}$ ta tìm được $\max f(t) = f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{\max} \Leftrightarrow \sin\varphi_{\max} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{8}$, chọn $b = 5, a = 8$

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM} = (2;-1;2)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình đường thẳng $MN: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với Δ. Suy ra phương trình $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Trên d ta lấy điểm A(3;2;0).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN, khi đó $\widehat{((\alpha),\Delta)} = \widehat{AMH}$.

Ta có: $\cos\widehat{AMH} = \frac{MH}{MA} \geq \frac{MK}{MA}$,

mà $\frac{MK}{MA}$ không đổi nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) \equiv (MN, d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{NM} \wedge \vec{u} = (-1;6;4)$ là VTPT của (β)

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = (-16;-10;11)$ là VTPT của (α)

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

Bài 3.5.5. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ và điểm A(1;2;3). Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và

1) Δ đi qua M(1;1;1) và khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất;

2) Δ đi qua M và khoảng cách giữa Δ và $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (1;1;1)$ là VTPT

Gọi $\vec{u} = (a;b;c)$ là VTCP của Δ, do $\Delta \subset (P) \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$ (1)

1) Ta có: $\overrightarrow{AM} = (0;-1;-2) \Rightarrow \left[\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right] = (c+2b;2a;-a)$

Do đó:

$$d(A,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{\frac{(c+2b)^2+5a^2}{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{\frac{(b-a)^2+5a^2}{a^2+b^2+(a+b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{b^2-2ab+6a^2}{b^2+2ab+b^2}}$$

Nếu $a = 0 \Rightarrow d(A,\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, với $a \neq 0$ đặt $t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-2t+6}{t^2+t+1}$, khảo sát hàm số f(t) ta tìm được

$$\max f(t) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = 10, \ \min f(t) = f(4) = \frac{2}{3}$$

- Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất khi $t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, chọn $b = -2 \Rightarrow a = 3$, $c = -1$, suy ra phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

- Khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất khi $t=4\Leftrightarrow \frac{b}{a}=4$, chọn $b=4\Rightarrow a=1$, $c=-5$, suy ra phương trình đường thẳng: $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

2) Đường thẳng d đi qua $N(2;0;0)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$ là VTCP

$\overrightarrow{MN}=(1;-1;-1)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right]=(2a+b;-b;2a-b)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{MN}=3b$

Do đó $d(\Delta,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}=\frac{3|b|}{\sqrt{(2a+b)^2+b^2+(2a-b)^2}}=3\sqrt{\frac{b^2}{4a^2+3b^2}}\le\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0\Rightarrow c=-b\Rightarrow\vec{u}=b(0;1;-1)$

Vậy phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$.

Bài 3.5.6. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;-1;2)$ và cắt đường thẳng $d':\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$ sao cho:

1) Khoảng cách từ $B(2;1;1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

2) Khoảng cách giữa d và $\Delta:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(-1+2t;\ t;\ 2-t),\ t\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM}=(2t-1;\ t+1;\ -t)$ là VTCP của đường thẳng d.

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;\ 2;\ -1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]=(1-t;\ 1;\ 4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B,\ d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\sqrt{\frac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}}=\sqrt{f(t)}$$

Ta có $f(t)=\frac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}$ nên $f'(t)=\frac{98t(t-2)}{(6t^2-2t+2)^2}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f(0)=18,\ \min f(t)=f(2)=\frac{1}{11}$.

Do đó:

- $\min d(B,\ d)=\frac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t=2\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(3;\ 3;\ -2)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \frac{x}{3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-2}$.
- $\max d(B,\ d)=3\sqrt{2}$ đạt được khi $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-1;1;-1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

2) Δ đi qua $N(5;\ 0;\ 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;\ -2;\ 1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right]=(t-1;\ 4t-1;\ 6t),\ \overrightarrow{AN}=(5;\ 1;\ -2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|}=\frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1)^2+(4t-1)^2+(6t)^2}}$$

$$=3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}}=3.\sqrt{f(t)},\ f(t)=\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}.$$

Vì $f'(t)=\frac{6(t+2)(4-37t)}{(53t^2-10t+2)^2}$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2,\ t=\frac{4}{37}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f\left(\frac{4}{37}\right)$, khi đó $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{37}(29;\ -41;\ 4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là $d:\ \frac{x}{29}=\frac{y+1}{-41}=\frac{z-2}{4}$.

Mục lục

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§ 1. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN 7
§ 2. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM 18
§ 3. NHÓM CÁC BÀI TOÁN VỀ HÌNH BÌNH HÀNH 27
§ 4. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG TRÒN VÀ CÔNIC 40
§ 5. NHÓM CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TAM GIÁC 73

Chương 2

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỔNG HỢP

§ 1. QUAN HỆ VUÔNG GÓC 94
§ 2. GÓC 107
§ 3. KHOẢNG CÁCH 129
§ 4. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN 149
§ 5. MẶT CẦU – MẶT TRỤ TRÒN XOAY 183

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§ 1. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ VÀ ỨNG DỤNG 206
§ 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 224
§ 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 251
§ 4. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU 276
§ 5. CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ 291